MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG DER

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

(UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN)

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND BÉLA MAURITZ

MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VIERUNDDREISSIGSTER BAND 1926—27.

BUDAPEST

DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN

1928

MTA AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG DER

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

(UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN)

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND BÉLA MAURITZ

MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VIERUNDDREISSIGSTER BAND 1926—27.

BUDAPEST

DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN

1928

M. T. AKAD. KÖNYVTÁR
I. sz. Növénytár
1928 4653

DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN.

INHALT DES XXXIV. BANDES.

Seite

ALAD. VENDL: † FR. SCHAFARZIK ... 5

Abhandlungen.

1. L. KLUG: Über die einer Fläche zweiter Ordnung eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeder ... 7
2. — — Über die einer Fläche zweiter Ordnung umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder ... 21
3. — — Die orthozentrischen Polartetraeder der Flächen zweiter Ordnung ... 34
4. — — Über mehrfach involutorische Punktgruppen ... 44
5. — — Über Tetraeder, dessen Kanten eine Kugel berühren ... 56
6. ALAD. VENDL: Über die Sande in der Umgebung von Konia ... 74
7. — — Über die Amphibolite der Surián-Gebirgsgruppe ... 91
8. B. MAURITZ und MIK. VENDL: Beiträge zur Kenntnis der abyssischen Gesteine des Syenitstockes von Ditró 108

†PROFESSOR Dr FRANZ SCHAFARZIK.

Von ALADÁR VENDL.

Am 5. September 1927 entschlief in Budapest Professor Dr. Franz Sshafarzik, — seit 1902 Mitglied der Akademie und Redakteur der Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn.

Mit ihm ist der letzte jener Generation hervorragender Geologen von uns geschieden, die am Ende des XIX. und in den ersten zwei Dezennien des XX. Jahrhunderts eine Blütezeit der Geologie in Ungarn herbeigeführt haben.

Franz Schafarzik wurde am 20. März 1854 in Debrecen geboren als Sohn einer Offiziers-Familie. Nach Beendigung seiner Studien an der Universität in Budapest hat Professor Dr. Joseph Szabó — der Altmeister der ungarischen Geologie — ihn als Assistent im mineralogisch-geologischen Institut der Universität in Budapest angestellt. Damit begann die wissenschaftliche Tätigkeit von Schafarzik. Im Jahre 1878 hat er — als Offizier in der Reserve — an der Okkupation in Bosnien teilgenommen und für seine Tapferkeit wurde ihm das Militärverdienstkreuz verliehen.

Im 1882 hat er die Berufung der königlich ungarischen geologischen Reichsanstalt angenommen und wurde zum Staatsgeologen ernannt. In dieser Anstalt hat er 22 Jahre gedient.

Seit 1891 war er Privatdozent für technische Geologie an der Technischen Hochschule und im Jahre 1904 wurde er daselbst zum ordentlich öffentlichen Professor für Mineralogie und Geologie ernannt. Er ist nach Ablauf seines Ehrenjahres von diesem Lehrstuhl — unter Verleihung der Signum laudis Gubernatoris — mit 1. September 1926 in den Ruhestand übergetreten.

M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Professor Franz Schafarzik war ein Mann der stillaufbauenden Arbeit. Bescheiden, zurückgezogen und stillsam arbeitete er mit staunenswerter Ausdauer an der Lösung der ihm anvertrauten Arbeiten, besonders an der Geologie der Südkarpaten. Er hat die geologische Aufnahme der Südkarpaten schon im Jahre 1884 begonnen und seitdem hat er jährlich mehrere Monate im Hochgebirge der Südkarpaten gearbeitet. In diesen geologischen Arbeiten hat er die reichlichen Erfahrungen, die er während seiner ausländischen geologischen Reisen gesammelt hat, fruchtbringend ausgenützt.

Im August 1927 hat er noch im Banat geologische Beobachtungen ausgeführt. Vor einer Woche seines letzten Tages hat er seine Arbeit abbrechen müssen; er hat sein Herz zu unruhig gefühlt. Nach Hause zurückgekehrt hat sein abgeschwächtes Herz aufgehört zu schlagen.

Seine Publikationen — teils geologischen, teils petrographischen Inhalts und über 100 an der Zahl — enthalten wichtige Resultate in Bezug auf die geologischen Verhältnisse in Ungarn. Besonders die Umgebung von Budapest und die westlichen Teile der Südkarpaten sind in seinen Mitteilungen musterhaft bearbeitet worden. Der größte Teil seiner Arbeiten ist in den Ausgaben der königlich ungarischen geologischen Reichsanstalt erschienen.

Die mehr als 52-jährige wissenschaftliche Tätigkeit von Prof. Schafarzik wird durch diese bleibenden Denksteine verewigt.

1.

ÜBER DIE EINER FLÄCHE ZWEITER ORDNUNG EINGESCHRIEBENEN ORTHOZENTRISCHEN TETRAEDER.

Von L. KLUG.

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung von 22. Okt. 1923.*

1. Die vier Höhen eines Tetraeders treffen sich nur dann in einem Punkte, wenn der Fußpunkt einer und somit jeder Höhe der Höhenpunkt desjenigen Kantendreieckes ist, auf dessen Ebene die Höhe senkrecht steht. Ein solches Tetraeder heißt *orthozentrisch*, der Treffpunkt der Höhen ist sein Orthozentrum oder Höhenpunkt und es ist Polartetraeder bezüglich einer Kugel, deren Mittelpunkt im Höhenpunkt liegt und deren Halbmesserquadrat gleich ist dem Produkte der Strecken, in welche der Höhenpunkt eine Höhe teilt. Eine Fläche II. O. hat ∞^4 orthozentrische Polartetraeder, nämlich diejenigen, die sie mit jeder Kugel gemeinsam hat.

Ein Kegelschnitt k^2 und ein außerhalb seiner Ebene δ liegender Punkt D bestimmen ∞^1 orthozentrische Tetraeder, die einen Eckpunkt in D haben und deren D gegenüber liegendes Kantendreieck ABC dem Kegelschnitt k^2 umgeschrieben (oder auch eingeschrieben) ist. Der Höhenpunkt H_4 dieses Kantendreieckes ist der Fußpunkt der Tetraederhöhe DH_4. Bedeutet H den Höhenpunkt des Tetraeders und H_{12} den Höhenfußpunkt der Höhe CH_4 des Dreieckes ABC, so hat man

$$DH_4 . HH_4 = CH_4 . H_4H_{12}.$$

---

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: *Másodrendű felületbe írt tetraéderek közös magasságponttal.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő, Bd. XLI., (1925), p. 33—45.

Da die rechte Seite dieser Gleichung der Potenz des Punktes H_4 bezüglich des MONGE-Kreises x^2 von k^2 gleich ist (Siehe: diese *Berichte*, Bd. XXXIII. S. 9), so läßt sich daraus der Höhenpunkt H auf der Höhe DH_4 bestimmen; u. z. liegt H_4 außerhalb der Strecke DH, wenn H_4 innerhalb des (reellen) MONGE-Kreises liegt. Ist aber H_4 außerhalb x^2, oder ist x^2 imaginär, so muß H_4 auf der Strecke DH liegen.

Als Beispiel wollen wir den Höhenpunkt H derjenigen ∞^1 orthozentrischen Tetraeder $ABCD$ bestimmen, deren reeller Eckpunkt D und reelle Ebene δ der Gegenseite gegeben ist und deren übrige drei Seiten den absoluten Kegelschnitt berühren. Beschreibt man aus der orth. Projektion H_4 des Eckpunktes D auf die Ebene δ als Mittelpunkt die Kreise $\bar{k}^2$, $\bar{l}^2$ mit den Halbmessern DH_4, $DH_4.\sqrt{2}$, so ist $\bar{k}^2$ der reelle Vertreter des imag. Kreises k^2, in welchem der orth. Bündel D die Ebene δ trifft; $\bar{l}^2$ ist der reelle Vertreter des imag. MONGE-Kreises l^2 desselben und zugleich derjenige FAURE-Kreis, dessen Mittelpunkt in H_4 liegt. Für ein dem Kreise k^2 umgeschriebenes imag. Dreieck ABC, dessen Höhenpunkt in H_4 liegt und das ein Polardreieck von l^2 ist, hat man $DH_4.HH_4 = CH_4.H_4H_{12} = 2.\overline{DH_4}^2$, also $HH_4 = 2.DH_4$. Der Höhenpunkt H des Tetraeders $ABCD$ hat daher auf der Höhe DH_4 einen doppelt so großen Abstand von δ wie D, und wird von diesen Eckpunkt durch δ getrennt. Also:

«Der Höhenpunkt der ∞^1 einer Kugel umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder, die eine gemeinsame reelle Seite haben, deren Gegeneckpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist: liegt auf der reellen Höhe des Tetraeders und hat vom Mittelpunkt einen Abstand, der dem dreifachen Kugelhalbmesser gleich ist.»

2. Will man einer Fläche II. O. F^2 ein orthozentrisches Tetraeder einschreiben, so kann man drei Eckpunkte A, B, C desselben auf F^2 beliebig annehmen; die im Höhenpunkt H_4 des Dreieckes ABC auf seine Ebene errichtete Senkrechte trifft F^2 in den vierten Eckpunkten D, D' der orthozentrischen Tetraeder $ABCD$, $ABCD'$.

Dem Kegelschnitt k^2, in welchem die Ebene ABC die Fläche F^2 trifft, kann man ∞^1 Dreiecke $A_iB_iC_i$ einschreiben, deren

Höhenpunkt H_4 ist. Diese bilden je eine Seite der ∞^1 der F^2 eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeder, welche einen gemeinsamen Eckpunkt D und denselben Höhenpunkt H haben und daher Polartetraeder der Kugel ϱ^2 sind, deren Mittelpunkt H und deren Halbmesser $\sqrt{HD.HH_4}$ ist.

Ist P ein beliebiger Punkt der Fläche F^2, P_1 der Treffpunkt der Geraden DP mit der Ebene ABC, so möge eine der aus P_1 ausstrahlenden Tangenten des von den Seiten der Dreiecke $A_iB_iC_i$ umhüllten Kegelschnitts k'^2 den Kegelschnitt k^2 in den Punkten B_p, C_p treffen. Dann ist das Tetraeder $A_pB_pC_pD$ auch unter denen, welche H zum Höhenpunkt haben, und die Seite B_qC_pD trifft F^2 in einem durch P gehenden Kegelschnitt p^2. Diesem kann man also das Dreieck PQR einschreiben, so, daß es mit B_pC_pD einen gemeinsamen Höhenpunkt habe, woraus dann folgt, daß auch die Tetraeder A_pPQR, $A_pB_pC_pD$ den gemeinsamen Höhenpunkt H haben und Polartetraeder der Kugel ϱ^2 sind; also kann schließlich jeder beliebige Punkt P der Fläche F^2 der Eckpunkt eines der F^2 eingeschriebenen Tetraeders sein, dessen Höhenpunkt ein gegebener Punkt H ist. Wir haben daher:

Einer Fläche II. O. F^2 kann man ∞^3 Tetraeder einschreiben, welche einen gemeinsamen Höhenpunkt haben; jeder Punkt von F^2 ist Eckpunkt für ∞^1 solche Tetraeder, und diese sind sämtlich Polartetraeder einer Kugel, deren Mittelpunkt der feste Höhenpunkt ist.

3. Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage: *wie kann man einer Fläche II. O. ein Tetraeder einschreiben, dessen Höhenpunkt ein gegebener Punkt ist?*

Das Tetraeder $ABCD$ mit dem Höhenpunkt H sei der Fläche F^2 eingeschrieben, diese treffe die Tetraederhöhe DHH_4 noch im Punkte D' und die Höhe CH_4H_{12} des Kantendreieckes ABC im Punkte C', ferner seien MF, MG die zu CH_4, bzw. AB parallele Halbmesser eines beliebigen Kegelschnitts der Fläche F^2; endlich bezeichne EE' die mit dem Kegelschnittmittelpunkt M inzidente und mit DH parallele Sehne von F^2.

Man hat dann

$$DH_4.H_4D' : CH_4.H_4C' = EM.ME' : \overline{MF}^2.$$

Mit Rücksicht auf $DH_4 . HH_4 = CH_4 . H_4H_{12}$ folgt daraus:

$$\frac{H_4D'}{HH_4} = \frac{EM.ME'}{\overline{MF}^2} \cdot \frac{H_4C'}{H_4H_{12}} = \frac{EM.ME'}{\overline{MF}^2}\left(1 + \frac{H_{12}C'}{H_4H_{12}}\right) =$$

$$= \frac{EM.ME'}{\overline{MF}^2}\left(1 + \frac{\overline{MF}^2}{\overline{MG}^2}\right),$$

also:

$$\frac{H_4D'}{HH_4} = EM.ME'\left(\frac{1}{\overline{MF}^2} + \frac{1}{\overline{MG}^2}\right). \qquad (\alpha)$$

Ist F^2 eine Zentralfläche, O deren Mittelpunkt, EOE' der zu DH parallele Durchmesser, und sind OF und OG zwei auf diesen und aufeinander senkrechte Durchmesser derselben, so vereinfacht sich (α) in

$$\frac{H_4D'}{HH_4} = \overline{OE}^2\left(\frac{1}{\overline{OF}^2} + \frac{1}{\overline{OG}^2}\right). \qquad (\beta)$$

Ist aber F^2 ein Paraboloid und läuft DH mit seiner Achse parallel, und sind p, p' die Parameter der in den Symmetrieebenen liegenden Parabeln, so folgt aus (α):

$$\frac{1}{HH_4} = ME.\left(\frac{1}{\overline{MF}^2} + \frac{1}{\overline{MG}^2}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}. \qquad (\gamma)$$

Steht endlich DH senkrecht zur Paraboloidachse und ist NE ein mit DH paralleler, NF ein zu DH senkrechter Halbmesser eines zur Achse senkrechten Paraboloidschnittes, so folgt aus (α)

$$\frac{H_4D'}{HH_4} = \frac{\overline{NE}^2}{\overline{NF}^2}. \qquad (\delta)$$

Will man also einer Zentralfläche II. O. F^2 ein Tetraeder einschreiben, dessen Höhenpunkt H ist, so verbindet man diesen mit einem beliebigen Punkt D' der Fläche und teilt die Strecke HD' im Punkte H_4 nach der Formel (β), wo OE der zu HD' parallele Halbmesser ist, OF und OG aber zwei beliebige aufeinander und auf HD' senkrechte Halbmesser der F^2 sind und das Vorzeichen des Teilverhältnisses nach dem Vorzeichen der Werte $\overline{OE}^2$, $\overline{OF}^2$, $\overline{OG}^2$ bestimmt wird. Trifft dann die im

Punkte H_4 auf die Gerade HD' errichtete senkrechte Ebene die Fläche F^2 in dem Kegelschnitt k^2, schreibt man diesem ein Dreieck ABC ein, dessen Höhenpunkt H_4 ist, und trifft endlich die Gerade HD' die F^2 nochmals im Punkte D: so ist $ABCD$ eines der gesuchten Tetraeder. Bezüglich einer Kugel ϱ^2 vom Mittelpunkt H ist nun $ABCD$ ein Polartetraeder, und jedes der F^2 eingeschriebenes Polartetraeder von ϱ^2 hat H zum Höhenpunkt.

[Ist F^2 eine Kugel, so wird $H_4D' : HH_4 = 2$; also:

«Das Spiegelbild des Höhenpunktes jedes einer Kugel eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders bezüglich einer Seite desselben halbiert die Strecke, welche auf der entsprechenden Höhe von dieser Seite und den vom Eckpunkt verschiedenen Punkt der Kugel auf ihr begrenzt wird.» Dies ersieht man auch unmittelbar so:

Benützt man die frühere Bezeichnung für das der Kugel eingeschriebene orthozentrische Tetraeder $ABCD$, so sieht man aus der Ähnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke $C'D'H_4$, $H_{12}HH_4$ (da $C'H_4 = 2.H_{12}H_4$), daß $H_4D' = 2.HH_4$.]

Für das *Paraboloid* F^2 ist der Vorgang derselbe, nur benützt man zur Bestimmung des Teilpunktes H_4 die Formeln (γ) oder (δ).

Für das *Drehparaboloid* ($p=p'$ also $2\,HH_4=p$) erhält man:

«Wenn eine Seitenebene eines dem Drehparaboloid eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders auf die Paraboloidachse senkrecht steht: so ist der Abstand des Höhenpunktes von ihr gleich dem Abstande der Leitebene des Paraboloids von seinem Brennpunkte (gleich $\frac{1}{2}$ p). Wenn aber eine Seitenebene zur Paraboloidachse parallel liegt, so fällt das Spiegelbild des Höhenpunktes bezüglich dieser Seite auf das Paraboloid. (Dies ist auch unmittelbar leicht ersichtlich.)

Ist F^2 ein gleichseitig hyperbolisches Paraboloid, welches wir kürzer *gleichseitiges Paraboloid* nennen wollen, also $p=-p'$, und ist eine Höhe des demselben eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders zu seiner Achse parallel, so wird $HH_4=0$; also koinzidiert der Höhenpunkt auf dieser Höhe mit seinem Fußpunkt. Je nachdem nun der Eckpunkt auf dieser Höhe im Endlichen oder unendlichferne liegt, verkümmert das Tetraeder in ein

Dreieck oder in ein Prisma. Im ersten Fall ist nämlich der Schnitt der auf der Achse senkrechten Seite mit dem Paraboloid eine gleichseitige Hyperbel, welche durch den Höhenpunkt jedes ihm eingeschriebenen Dreieckes geht.

Wir wollen nun zeigen, daß der Höhenpunkt eines jeden dem *gleichseitigen Paraboloid* eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders auf der Fläche liegt, und untersuchen, ob es auch noch andere solche Flächen zweiter Ordnung gibt?

4. Die Höhe DHH_4D' eines dem gleichseitigem Paraboloid F^2 eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders $ABCD$ stehe senkrecht auf die Paraboloidachse. Es trifft dann die durch diese Höhe zur Achse senkrecht gelegte Ebene F^2 in einer gleichseitigen Hyperbel, und das Verhältnis der Quadrate der auf einander senkrechten Halbmessern derselben ist gleich -1. Nach der Formel (δ) teilt H_4 die Strecke HD' nach diesem Verhältnis. Hieraus folgt, da H_4 nicht unendlichfern liegt, daß H mit D' koinzidiert, also ein Punkt von F^2 ist. Dies kann man auch unmittelbar einsehen.

(Das gleichseitige Paraboloid wird nämlich von zwei senkrechten und mit seiner Achse parallelen Ebenen in kongruenten Parabeln getroffen, die einen gemeinsamen Punkt C haben, durch welchen ein gemeinsamer Durchmesser geht. Stehen nun die Sehnen AB, DD' dieser Parabeln auf den gemeinsamen Durchmesser senkrecht und haben sie mit dem Parameter der Parabeln gleichen Abstand von einander, so treffen diese Sehnen den Durchmesser in den Höhenpunkten H_4, H_{12} der Dreiecke ABC, bzw. $DD'C$; daher ist das Tetraeder $ABCD$ orthozentrisch und D' ist sein Höhenpunkt.)

Schreibt man nun einem gleichseitigen Paraboloid F^2 ein beliebiges orthozentrisches Tetraeder ein, so kann man ihm, wie jeder Fläche II. O. noch ∞^3 solche Tetraeder einschreiben, die mit jenem den gemeinsamen Höhenpunkt haben. Unter diesen gibt es ∞^2, deren eine Höhe zur Paraboloidachse senkrecht steht. Von diesen haben wir nun bewiesen, daß ihr Höhenpunkt auf F^2 liegt, also ist dies für alle gültig. Daher:

Der Höhenpunkt eines jeden dem gleichseitigen Paraboloid eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders liegt auf der Fläche.

Wir bemerken noch, daß man einem gleichseitigen Paraboloid nicht ∞^3, sondern ∞^4 orthozentrische Paraboloide einschreiben kann, welche einen gemeinsamen Höhenpunkt auf der Fläche haben; jeder Punkt D der Fläche ist ein Eckpunkt für ∞^2 und jede Ebene ε ist eine Seitenebene für ∞^3 solche Tetraeder.

Außer dem gleichseitigen Paraboloid hat auch das gleichseitige Hyperboloid die Eigenschaft, daß der Höhenpunkt der ihm eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeder auf ihm liegt.

Betrachten wir zwei gleichseitige Hyperboloide, von denen das erste F_1^2 einschalig, das zweite F_2^2 zweischalig ist, und die einen gemeinsamen Asymptotenkegel und die gemeinsamen Halbachsen a, b, c haben; a möge die F_2^2, b und c aber die F_1^2 in reellen Punkten treffen, also

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

sein. Schreibt man diese Gleichung in den Gestalten

$$-a^2 \cdot \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = -1, \quad a^2 \cdot \left(-\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) = -1$$

und vergleicht sie mit der Gleichung (β), so folgt aus der ersten und zweiten Gleichung (auf die Flächen F_1^2, bzw. F_2^2 angewendet), daß der Wert des Verhältnisses $H_4D' : HH_4 = 1$. Und da der Punkt H_4 nicht immer unendlich fern liegen kann, so muß HD' den Wert 0 haben, d. h. *das einem gleichseitigen Hyperboloid eingeschriebene orthozentrische Tetraeder hat einem Höhenpunkt auf der Fläche.* (Der Satz ist auch für den gleichseitigen Kegel als verkümmertes Hyperboloid gültig.)

Außer dem gleichseitigen gibt es kein Hyperboloid mit obiger Eigenschaft. Denn nimmt man den Eckpunkt D eines dem Hyperboloid F^2 eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders $ABCD$ in einen seiner unendlich fernen Punkte an, so muß der Höhenpunkt H desselben mit dem Fußpunkt H_4 der Höhe DH koinzidieren, welcher der Höhenpunkt des Dreieckes ABC ist. Soll nun H_4 auf F^2 liegen, so muß ihr Schnitt mit der Seite ABC eine gleichseitige Hyperbel und also F^2 ein gleichseitiges Hyperboloid sein.

Zieht man endlich in Betracht, daß wenn F^2 ein Ellipsoid oder ein elliptisches Paraboloid ist, die rechte Seite der Gleichungen (α) und (β) positiv sein wird, daß also der aus dem Verhältnis $H_4D' : HH_4$ sich ergebende Teilpunkt H_4 der Strecke HD' (reelle Tetraeder vorausgesetzt) auf dieser Strecke selbst ist: so ergibt sich, daß man auch diesen Flächen keine allgemeine orthozentrische Tetraeder einschreiben kann, deren Höhenpunkt auf der Fläche liegt.

5. Die Polarfläche F_1^2 eines gleichseitigen Paraboloids F^2 in Bezug auf eine Kugel ϱ^2 deren Mittelpunkt H auf F^2 liegt, ist ein hyperbolisches Paraboloid, welches die Seiten der dem F^2, eingeschriebenen Polartetraeder von ϱ^2 berührt. Auch F_1^2 geht durch H und die Berührungsebenen beider Flächen in diesem Punkte stehen abwechselnd auf ihre Achsen senkrecht. F_1^2 geht in ein gleichseitiges Paraboloid über, wenn H auf einer Scheitelerzeugende von F^2 liegt.

Nimmt man dem Mittelpunkt H der Kugel ϱ^2 im Scheitelpunkt des gleichseitigen Paraboloids an, und ist das negative Quadrat des Durchmessers dieser imag. Kugel gleich dem Parameter der in den Symmetrieebenen liegenden Parabeln von F_1^2: so fällt die Polarfläche $F_{1\,3}^2$ in Bezug auf ϱ^2 mit F^2 zusammen. Also sind die dem gleichseitigen Paraboloid eingeschriebenen Polartetraeder dieser Kugel ϱ^2 dem Paraboloid zugleich umgeschrieben.

Ist nun A ein beliebiger Punkt des gleichseitigen Paraboloids F^2, berührt seine Polarebene nach jener Kugel ϱ^2 die Fläche F^2 im Punkte B, und trifft die Polare der Geraden AB nach ϱ^2 oder F^2 die letztere Fläche in C resp. D: so ist $ABCD$ ein dem F^2 eingeschriebenes und umgeschriebenes Tetraeder, dessen Höhenpunkt H ein Scheitel von F^2 ist und dessen Kantenviereck $ACBD$ auf F^2 selbst liegt.

Es gibt noch eine Fläche zweiter Ordnung, welche ihr eingeschriebene und zugleich umgeschriebene orthozentrische Tetraeder zuläßt, aber ihr Höhenpunkt liegt nicht auf der Fläche.

Ist nämlich A ein Punkt eines einschaligen Drehhyperboloids F^2, dessen Meridiane gleichseitige Hyperbeln sind, und ϱ^2

die Kugel, welche F^2 im Kehlkreis berührt: so berührt die Polarebene von A nach ϱ^2 (oder die Apolarebene von A nach ϱ^2, wenn diese die reelle Vertreterin einer imaginären Kugel ist) das Hyperboloid F^2 im Punkte B. Trifft die Polare der Geraden AB nach ϱ^2 oder auch nach F^2 letztere Fläche in den Punkten C, D, so ist das orthozentrische Tetraeder $ABCD$ dem Hyperboloid eingeschrieben und umgeschrieben, aber sein Höhenpunkt als Mittelpunkt von F^2 liegt nicht auf F^2.

6. Bestimmen wir jetzt den Höhenpuukt eines solchen der Fläche F^2 eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders $ABCD$, dessen vier Eckpunkte in einem Flächenpunkt koinzidieren.

Es treffe die Ebene δ des Kantendreieckes ABC die F^2 im Kegelschnitt k^2. Beschreibt nun D, also auch der Punkt D' der Höhe DHH_4D' die Fläche F^2: so beschreibt H, da zufolge der Formeln (α) und (β) das Verhältnis $H_4D' : HH_4 = \lambda$ konstant ist, die mit ihr in Bezug auf δ als Affinitätsebene orthogonalaffine Fläche II. O. H^2. Die homologen Punkte sind D', H.

Verschiebt man δ nach der auf ihr senkrechten Richtung, so verschiebt sich auch H^2 nach dieser Richtung. Berührt δ bei dieser Verschiebung die Fläche F^2 im Punkte F, so schrumpfen die Eckpunkte des Kantendreieckes ABC in T zusammen; die Tetraeder verkümmern, aber ihre Höhenpunkte bleiben auf der mit H^2 kongruenten und mit F^2 bezüglich der Berührungsebene δ affinen Fläche, welche also F^2 im Punkte T berührt. Wenn schließlich der Eckpunkt D des Tetraeders ebenfalls in T fällt, so ist der Höhenpunkt H des in den Punkt T verkümmerten Tetraeders der Treffpunkt seiner Normalen mit der Fläche H^2. Dieser Punkt H ergibt sich aus dem Verhältnis $TI : HT = \lambda$, wenn TI die auf der Normale des Punktes T der Fläche F^2 liegende Sehne bedeutet.

HT läßt sich durch die Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 des Flächenpunktes T leicht ausdrücken. Sind nämlich MF, MG diejenigen zwei Halbmesser eines Kegelschnitts der Fläche F^2, welche mit den Tangenten der Hauptschnitte des Punktes T parallel liegen, EME' aber die mit der Normale TI parallel gehende Sehne der Fläche durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts, so hat man bekanntlich:

$$\frac{TI}{2\varrho_1} = \frac{EM.ME'}{\overline{MF}^2}, \quad \frac{TI}{2\varrho_2} = \frac{EM.ME'}{\overline{MG}^2},$$

woraus mit Hilfe der Formel (α)

$$\frac{1}{HT} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

folgt. Also:

Das Spiegelbild des Höhenpunktes eines einer Fläche II. O. eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders, dessen Eckpunkte in einem Punkte T zusammenschrumpfen, bezüglich der Berührungsebene dieses Punktes, trennt die Krümmungsmittelpunkte der Hauptschnitte des Punktes T von diesem harmonisch.

7. Die einer Fläche II. O. F^2 eingeschriebenen Tetraeder mit dem gemeinsamen Höhenpunkt H sind Polartetraeder einer Kugel ϱ^2. Folglich umhüllen ihre Seiten die Polarfläche F'^2 von F^2 nach ϱ^2, die mit F^2 zugleich elliptische oder hyperbolische Punkte hat und ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid ist, je nachdem man durch H imaginäre oder reelle Berührungsebenen zu F^2 legen kann.

Ist H ein Punkt einer Fokallinie f^2 von F^2, so wird F'^2 ne Drehfläche, deren Drehachse die Tangente des Punktes H der Fokallinie ist. F'^2 ist ein Ellipsoid mit Fokalkreis, wenn F^2 ein Ellipsoid und f^2 seine Fokalellipse ist, oder wenn F^2 ein zweischaliges Hyperboloid und f^2 seine Fokalhyperbel ist. Hingegen hat das Drehellipsoid F'^2 zwei Brennpunkte, wenn F^2 ein Ellipsoid und f^2 seine Fokalhyperbel ist, oder wenn F^2 ein zweischaliges Hyperboloid und f^2 seine Fokalellipse ist und H noch innerhalb F^2 liegt. Liegt H in diesen Fällen ausserhalb F^2, so wird F'^2 immer ein zweischaliges Hyperboloid.

Ist F^2 ein einschaliges Hyperboloid, so ist F'^2, wenn H ein Punkt seiner Fokallinien ist, immer ein einschaliges Drehhyperboloid.

Ist endlich H ein Brennpunkt der Drehfläche F^2, so ist F'^2 eine Kugel.

Wir nehmen jetzt den Punkt H auf der Fläche F^2 an. Ist F^2 kein gleichseitiges Hyperboloid oder Paraboloid, so muss das eingeschriebene orthozentrische Tetraeder $ABCD$ ein beson-

deres sein, nämlich die in einem Eckpunkte, z. B. D, zusammenstossenden Seiten müssen ein orthogonales Dreikant bilden. Dies vorausgesetzt zerfällt die Fläche F'^2 in zwei Punkte: der eine ist der Eckpunkt D, der andere aber, durch den die veränderlichen Tetraederseiten ABC gehen, ist der sogenannte FRÉGIER-Punkt F des Punktes D der Fläche F^2 auf seiner Normalen.

8. Wir wollen nun die FRÉGIER-Fläche, d. h. den Ort der FRÉGIER-Punkte eines veränderlichen Punktes D eines Ellipsoids F^2 bestimmen, dessen Mittelpunkt und Halbachsen O, a, b, c sind.

Die Kante DC des der F^2 eingeschriebenen besonderen orthozentrischen Tetraeders $ABCD$ nehmen wir in der Ebene des Hauptschnittes (ac) zur Achse c parallel an und bezeichnen den Kegelschnitt, in welchem die zu DC senkrechte Seite DAB die Fläche trifft, mit k_d. Ist nun E der FRÉGIER-Punkt des Kegelschnitts k_d für den Punkt D, so trifft CE die Flächennormale $DN \equiv n$ des Punktes D im FRÉGIER-Punkt F dieses Punktes der Fläche.

Wir bezeichnen die Fußpunkte der aus den Punkten D, C und F auf die Achse c gefällten Senkrechten, bzw. mit G, K und M; die Treffpunkte (c, n), (c, EC), (a, EC), bzw. mit N, L, P; die Strecken DG, GO, FM, MO, bezw. mit x, y, ξ, ζ.

Der Kegelschnitt k_d ist mit dem Hauptschnitt (ab) homothetisch und der zu E homologe FRÉGIER-Punkt desselben hat vom Mittelpunkt O den Abstand $a(a^2-b^2):(a^2+b^2)$; also ist $EG = x(a^2-b^2):(a^2+b^2)$.

Da $DE = 2xb^2:(a^2+b^2)$ und $OP = x.a^2:(a^2+b^2)$, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken CDE, LOP, daß $OL = a^2z:b^2$, und man hat noch $ON = z(a^2-c^2):c^2$.

Setzt man diese Werte in den Proportionen

$$FM:CK = LO-MO:LO+OK, \quad FM:CD = MO+ON:GO+ON$$

ein, so erhält man

$$\xi:x = \frac{2a^2}{b^2} - \zeta:\frac{za^2}{b^2} + z, \quad \xi:x = \zeta + \frac{z(a^2-b^2)}{c^2}:z + \frac{z(a^2-c^2)}{c^2}$$

Daraus folgt, wenn $s = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ ist:

$$s.\xi = x(s-2b^2c^2), \quad s\zeta + z(s-2a^2b^2).$$

Hätte man den Scheitelpunkt D des Kegelschnitts k_d nicht in (ac), sondern im Hauptschnitt (bc) angenommen und wäre der Abstand dieses anderen Punktes D' und seines zur Fläche gehörigen FRÉGIER-Punktes F' von der Achse c gleich y, bzw. η: so erhielten wir die von ζ unabhängige Gleichung $s\eta = y(s - 2c^2a^2)$.

Wir bewegen jetzt den Punkt D auf den Kegelschnitt k_d und verfolgen die Lage der zugehörigen FRÉGIER-Punkte.

Mit D zugleich bewegt sich seine Normale und beschreibt eine windschiefe Fläche IV. O. — eine sogenannte *Normalfläche* — welche zwei Leitgeraden hat. Die eine steht im Punkte N senkrecht zur Symmetrieebene ac, die andere steht in demjenigen Punkte N', in welchen die Flächennormale des Punktes D' die Achse c trifft, senkrecht zur Symmetrieebene bc. Ebenso beschreibt die Gerade CE eine windschiefe Fläche IV. O. mit zwei Leitgeraden, von welchen die eine im Punkte L auf die Ebene ac, die andere im Punkte L' auf die Ebene bc senkrecht steht, wenn L' die Punkte G, K von L harmonisch trennt.

Beide windschiefe Flächen haben in der Ebene von k_d eine unendlichferne Doppelgerade und werden also von allen zu dieser parallelen Ebenen in Kegelschnitten getroffen. Die zwei obigen FRÉGIER-Punkte F, F', sowie ihre bezüglich c symmetrischen Punkte liegen in einer solchen Ebene, also treffen sich die zwei windschiefen Flächen noch in einem Kegelschnitt k_f, der M zum Mittelpunkt und MF, MF' zu Halbachsen hat. Während also der Punkt D den Kegelschnitt k_d beschreibt, dessen Ebene von ac den Abstand z hat, beschreibt sein FRÉGIER-Punkt F einen Kegelschnitt k_f, dessen Mittelpunkt M in der Achse c liegt und dessen mit a und b parallele Halbachsen die für ξ und η gefundene Werte haben, wenn man noch für x und y die Werte $a(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} : c$, $b(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} : c$ einsetzt.

Beschreibt aber der Punkt D einen Kegelschnitt, dessen Ebene mit einer anderen Symmetrieebene parallel liegt, so erhalten wir als Ort der zugehörigen FRÉGIER-Punkte einen Kegelschnitt, dessen Ebene mit dieser parallel liegt. Daraus folgt, daß der Ort der FRÉGIER-Punkte eines Ellipsoids F^2 eine mit dieser koachsiale Fläche II. O. Φ^2 ist, deren in a, b, c liegende Halbachsen α, β, γ sich ergeben, wenn man in obigen Aus-

drücken für ξ, η, ζ statt x, y, z die Werte a, b, c setzt. Da nun diese Betrachtungen auch für die übrigen Zentralflächen gültig sind und sich auch für die Paraboloide in ähnlicher Weise ableiten lassen, so hat man:

Der Ort der Frégier*-Punkte einer Zentralfläche II. O. F^2, deren Halbachsen mit a, b, c bezeichnet werden, ist eine mit dieser koachsiale Fläche II. O. Φ^2; ihre in a, b, c liegende Halbachsen haben, wenn $s = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ ist, die Werte*

$$\alpha = a \cdot \frac{s - 2b^2c^2}{s}, \quad \beta = b \cdot \frac{s - 2c^2a^2}{s}, \quad \gamma = c \cdot \frac{s - 2a^2b^2}{s}.$$

Ist F^2 ein elliptisches Paraboloid, und sind p, p_1 die Parameter seiner Hauptschnitte, so wird Φ^2 ebenfalls ein elliptisches Paraboloid sein, dessen Hauptebenen in denen von F^2 liegen und dessen Scheitel in der Richtung vom Scheitel gegen die Brennpunkte von F^2 um die Strecke $pp_1 : (p+p_1)$ verschoben ist. Die Parameter der Hauptschnitte von Φ^2 sind

$$p \cdot \left(\frac{p - p_1}{p + p_1}\right)^2 \quad \text{und} \quad p_1 \cdot \left(\frac{p - p_1}{p + p_1}\right)^2$$

in denjenigen Symmetrieebenen von F^2, in welchen die Parameter der Hauptschnitte p_1, bzw. p sind.

Über die besonderen Fälle bemerken wir Folgendes:

Ist F^2 ein «gleichseitiges» Ellipsoid (also $c^2 = a^2b^2 : (a^2 + b^2)$), so ist Φ^2 eine Ellipsenfläche, welche in der Symmetrieebene ab mit dem Hauptschnitt koachsial liegt und deren mit a und b inzidierende Halbachsen $\alpha = ac^2 : b^2$, $\beta = bc^2 : a^2$ sind.

Ist F^2 ein gleichseitiges Hyperboloid oder gleichseitiges Paraboloid, so hat Φ^2 nur unendlich ferne Punkte.

Man kann dies auch unmittelbar einsehen:

Der Höhenpunkt jedes einem gleichseitigen Hyperboloid oder Paraboloid eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders $ABCD$ liegt auf der Fläche. Sind nun seine in D zusammenstoßende Seiten orthogonal, so liegt der Höhenpunkt in D und zugleich auf der aus D auf die Seite ABC gefällten Senkrechten als einer Höhe des Tetraeders. Diese Höhe ist daher eine Tangente der Fläche im Punkte D, also geht die zu ihr senk-

rechte Seite zur Flächennormale des Punktes D parallel; sie trifft daher diese in dem unendlichfernen FRÉGIER-Punkt, u. s. w.

Daraus folgt: «Führt man durch einen beliebigen Punkt D eines gleichseitigen Hyperboloids oder gleichseitigen Paraboloids drei paarweise aufeinander senkrechte Sehnen, so liegen ihre Endpunkte in einer zur Flächennormale des Punktes D parallelen Ebenen.

«Der Schnitt eines gleichseitigen Hyperboloids oder gleichseitigen Paraboloids mit einer zu einer Flächennormalen parallelen Ebene, wird aus dem Fußpunkte der Normalen, durch einen gleichseitigen Kegel projiciert.»

2.

ÜBER DIE EINER FLÄCHE ZWEITER ORDNUNG UMGESCHRIEBENEN ORTHOZENTRISCHEN TETRAEDER.

Von L. KLUG.

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 10. Dec. 1923.*

1. Das orthozentrische Tetraeder $ABCD$, dessen Höhenpunkt H und dessen Höhenfußpunkt auf DH der Punkt H_4 ist, sei der Zentralfläche II. O. F^2 umgeschrieben. Wir setzen auch voraus, daß der Berührungspunkt E der Seite $ABC \equiv \delta$ mit der Höhe CH_4 des Kantendreieckes ABC inzident ist; denn wäre dem nicht so, so könnte man das Tetraeder durch ein solches ersetzen, ohne Änderung der Punkte D, H, H_4. Wenn nun die zu δ parallele Berührungsebene φ der Fläche F^2 diese im Punkte F berührt und die Höhe DHH_4 im Punkte L trifft, so wollen wir beweisen, daß *die Potenz des Punktes H_4 in Bezug auf die* MONGE-*Kugel ϱ^2 der Fläche F^2 dem Produkte $HH_4.DL$ gleich ist.*

Ist K^2 der der Fläche F^2 aus D umgeschriebene Kegel, so ist die Involution der sich in DF treffenden konjugierten Polarebenen für beide Flächen die nämliche; diese trifft daher δ in einer Strahleninvolution vom Mittelpunkt G, welche mit der Strahleninvolution der konjugierten Tangenten des Punktes E der Fläche F^2 kongruent ist. Da nun diese zugleich die konjugierte Polareninvolutionen desjenigen Kegelschnitts k^2 sind,

---

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: *Másodrendű felület köré írt tetraéderek közös magasságponttal.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő XLI., (1925), p. 47—59.

in welchen δ den Kegel K^2 trifft, so ist der Halbierungspunkt M der Strecke GE der Mittelpunkt von k^2.

In Bezug auf den Kegelschnitt k_1^2, in welchem der der Fläche F^2 umgeschriebene auf δ senkrechte Zilinder die Ebene δ trifft, sind die konjugierten Tangenten des Punktes E, sowie auch die mit diese kongruente orth. Projektion der konjugierten Tangenten des Punktes F auf δ: die konjugierten Polaren. Es wird daher, wenn G_1 die orth. Projektion des Punktes F auf δ und M_1 der Halbierungspunkt der Strecke EG_1 ist, dieser Punkt M_1 der Mittelpunkt von k_1^2 sein.

Die auf δ senkrechte Ebene DH_4F trifft δ in der zu MM_1 parallelen Geraden H_4G_1G; also liegt der Halbierungspunkt M_0 der Strecke H_4E auf MM_1.

Nachdem die konjugierten Polaren der Punkte E und H_4 für beide Kegelschnitte k^2 und k_1^2 die nämlichen sind, so sind jene die Kontingenzpunkte der zwei Kegelschnitte, also gehört auch die Strecke EH_4 als verkümmerter Kegelschnitt k_0^2 zu der Kegelschnittschar die jene bestimmen. Da nun auch die MONGE-Kreise $\varkappa^2$, $\varkappa_1^2$, $\varkappa_0^2$ jener Kegelschnitte k^2, k_1^2, k_0^2 mit den Halbmessern r, r_1, r_0 einem Büschel angehören, so hat man die Beziehung

$$r^2.\overline{M_0M_1} + r_0^2.\overline{M_1M} + r_1^2.\overline{MM_0} + \overline{M_0M_1}.\overline{M_1M}.\overline{MM_0} = 0.$$

Anderseits ist, wenn $H_4M=d$, $H_4M_1=d_1$, $H_4M_0=r_0$, auch die Beziehung

$$d^2.\overline{M_0M_1} + r_0^2.\overline{M_1M} + d_1^2.\overline{MM_0} + \overline{M_0M_1}.\overline{M_1M}.\overline{MM_0} = 0$$

richtig, woraus dann folgt, daß

$$(r^2-d^2).\overline{M_0M_1} + (r_1^2-d_1^2).\overline{MM_0} = 0.$$

Nun ist aber die Potenz des innerhalb der MONGE-Kreise $\varkappa^2$, $\varkappa_1^2$ liegenden Punktes H_4 in Bezug auf diese: $p^2=r^2-d^2$ und $p_1^2=r_1^2-d_1^2$, und da

$$M_0M_1 : M_0M = H_4G_1 : H_4G = DF : DG = DL : DH_4 = \lambda,$$

so folgt

$$p_1^2 = \lambda p^2.$$

Ist H_{12} der Fußpunkt der Höhe CH_4 des Dreieckes ABC, C_1 aber der Treffpunkt der Tetraederkante CD mit der Ebene φ, so hat man

$$LC_1 = \lambda . H_4C,\ p^2 = H_{12}H_4 . H_4C,$$

also

$$p_1^2 = \lambda p^2 = H_{12}H_4 . LC_1 = HH_4 . DL;$$

und da der Kreis $\varkappa_1^2$ auf die MONGE-Kugel ϱ^2 der Fläche F^2 liegt, somit p_1^2 zugleich mit der Potenz des Punktes H_4 bezüglich der ϱ^2 gleich ist, ist unsere Behauptung bewiesen.

Daraus folgt dann der Satz:

Ist F^2 eine Zentralfläche II. O., h eine Gerade, δ eine auf dieser senkrechte Berührungsebene von F^2, so ist jeder Punkt D von h der Eckpunkt eines der Fläche F^2 umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeders, dessen dem D gegenüberliegende Seite in δ liegt. Die Reihe der Eckpunkte D ist projektiv mit der Reihe der Höhenpunkte H der Tetraeder; die Doppelpunkte und die Gegenpunkte der Projektivität liegen auf die MONGE*-Kugel, bzw. auf die zu h senkrechten Berührungsebenen der Fläche F^2.*

Will man nun einer Zentralfläche II. O. F^2 ein Tetraeder umschreiben, dessen Höhenpunkt H gegeben ist, so kann man eine beliebige Berührungsebene δ von F^2 annehmen, in welchem eine Seite des Tetraeders liegen soll; die aus H auf δ gefällte Senkrechte h trifft diese in H_4 und die zu jener parallele Berührungsebene in dem Punkte L. Ist nun p_1^2 die Potenz des Punktes H_4 in Bezug auf die MONGE-Kugel von F^2, so trägt man die Strecke $DL = p_1^2/HH_4$ im Sinne H_4H von L aus auf die Gerade h, womit man im Punkte D einen Eckpunkt des gewünschten Tetraeders erhält. Eine beliebige durch D gelegte Berührungsebene von F^2 trifft δ in einer Kante AB und die aus H auf jener Berührungsebene gefällten Senkrechte trifft die Ebene δ in einem Eckpunkt C und die durch CD geführten Berührungsebenen treffen endlich die Gerade AB in den Eckpunkten A, B des gewünschten Tetraeders $ABCD$.

2. Die Konstruktion des einer Fläche II. O. umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeders kann man auch auf folgenden Satz gründen:

Die Potenz des Höhenpunktes eines, einer Zentralfläche II. O. umgeschriebenen Tetraeders in Bezug auf die MONGE-*Kugel der Fläche ist gleich dem Produkt der Abstände des Höhenpunktes von jedem Eckpunkt und der Gegenseite desselben.*

Ist nämlich O der Mittelpunkt der Zentralfläche II. O. F^2 und R der Halbmesser seiner MONGE-Kugel ϱ^2, dann hat man die frühere Bezeichnung benützend:

$$R^2 = r_1^2 + \left(\frac{LH_4}{2}\right)^2, \quad \overline{OH}^2 = \left(HH_4 - \frac{LH_4}{2}\right)^2 + \overline{M_1H}^2:$$

Daraus ergibt sich für die Potenz des Punktes H in Bezug auf ϱ^2 der Wert:

$$P^2 = R^2 - \overline{OH}^2 = r_1^2 - \overline{M_1H_4}^2 - HH_4(HH_4 - LH_4) =$$
$$= p_1^2 - HH_4(HH_4 - LH_4) = HH_4(DL - HH_4 + LH_4) = HH_4 . DH,$$

was zu beweisen war.

Um nun hierauf gestützt ein der Fläche F^2 umgeschriebenes Tetraeder aus seinem Höhenpunkt H zu konstruieren, bestimmt man dessen Eckpunkt D auf der aus H auf irgendeiner Berührungsebene δ der Fläche F^2 gefällten Senkrechten aus der Beziehung $P^2 = DH . HH_4$, wo H_4 den Fußpunkt der Senkrechten auf δ, P^2 aber die Potenz von H nach der MONGE-Kugel von F^2 bedeutet. Der weitere Vorgang ist gleich dem früheren.

Bei dem Beweise der zwei obigen Sätze haben wir angenommen, daß die Punkte innerhalb der MONGE-Kugel ϱ^2 liegen. Aber die Sätze kann man auf ähnliche Weise rechtfertigen, wenn jene Punkte außerhalb ϱ^2 liegen, also

$$P^2 = \overline{OH}^2 - R^2, \; p_1^2 = \overline{M_1H_4}^2 - r_1^2,$$

oder, wenn ϱ^2 imaginär, also

$$P^2 = R^2 + \overline{OH}^2, \; p_1^2 = r_1^2 + \overline{M_1H_4}^2$$

ist.

Nennt man nun die Kugel, deren Mittelpunkt ein beliebiger Punkt H und deren Halbmesserquadrat die Potenz von H in Bezug auf die MONGE-Kugel der Fläche II. O. F^2 ist: die FAURE-Kugel von F^2 mit dem Mittelpunkt H, so hat man den Satz:

Die einer Fläche II. O. F^2 umgeschriebenen ∞^3 Tetraeder mit gemeinsamen Höhenpunkt H, sind Polartetraeder der FAURE-*Kugel mit dem Mittelpunkt H der Fläche F^2.*

3. Obige Beweise sind auf die Paraboloide nicht anwendbar, da diese im Endlichen keine zwei parallele Berührungsebenen haben. Wir nehmen also jetzt für F^2 ein elliptisches Paraboloid an und setzen voraus (ohne dadurch die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen), daß die Seite $ABC \equiv \delta$ des dem Paraboloid umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeders $ABCD$ dasselbe im Scheitel E berühre, die Seite ABD aber auf einer Symmetrieebene senkrecht stehe, denn ein Tetraeder in einer anderen Lage kann, ohne Veränderung der Höhenpunktes, durch ein solches ersetzt werden.

Bei Benützung der früheren Bezeichungen sei die Höhe des Tetraeders $DH_4=h$, der Abstand des Eckpunktes D von der zur Kante AB parallelen (zweiten) Symmetrieebene sei $2u$, von der anderen (ersten) Symmetrieebene der Fläche aber $2u_1$, die Brennpunkte der in diesen Ebenen liegenden Parabeln seien F_1, bzw. F, ihre Parameter $p_1=4EF_1$ und $p=4EF$, endlich sei M der Halbierungspunkt der Strecke H_4E.

Der aus D dem Paraboloid F_2 umgeschriebene Kegel trifft die Ebene δ in einem die Kante AB berührenden Kegelschnitt k^2, dessen Mittelpunkt M ist. Diese Tangente AC und die zu ihr parallele möge die erste Symmetrieebene in den Punkten S und T treffen, deren Abstand $ST=2m$; dann seien D', H_4' und M' die orth. Projektionen der Punkte D, H_4 und M auf diese Ebene.

Wegen der Parabel in der Symmetrieebene ist $SH_4'=ET=m-u$, also $SM'=M'T=m$, $SE=m+u$ und wegen des Sehnenviereckes $D'STF$ ist $SE.ET=D'H_4'.ET$, d. h. $m^2-u^2=hp/4$.

Ist der Abstand der auf der zweiten Symmetrieebene senkrechten Tangenten des Kegelschnitts k^2 gleich $2m_1$, so findet man ebenso, daß $m_1^2-u_1^2=hp_1/4$.

Das Quadrat des Halbmessers des MONGE-Kreises von k^2 ist $m^2+m_1^2$ und die Potenz des Punktes H nach ihm ist

$$m^2+m_1^2-(u^2+u_1^2)=\tfrac{1}{4}h(p+p_1)$$

und weil das Dreieck ABC dem k^2 umgeschrieben ist, so hat man

$$H_{12}H_4 . H_4C = \tfrac{1}{4}h(p+p_1).$$

Da das Dreieck $D'ST$ der in der ersten Symmetrieebene liegender Parabel umgeschrieben ist, so liegt sein Höhenpunkt auf der Leitlinie der Parabel, daher ist

$$H_4'H_0 = \tfrac{1}{4}p$$

und

$$H_{12}H_4 . H_4'T = SH_4' . H_4'T = D'H_4' . H_4'H_0 = \tfrac{1}{4}hp.$$

Es folgt endlich aus diesen Beziehungen in Anbetracht der ähnlichen Dreiecke $H_0H'T$, HH_4C, daß

$$HH_4 = \frac{H_0H_4' . H_4C}{H_4'T} = \tfrac{1}{4}(p+p_1),$$

d. h. der Abstand des Höhenpunktes H von der Scheitelberührungsebene δ des Paraboloids ist gleich $\frac{1}{4}(p+p_1)$; H liegt daher in der MONGE-Ebene (entartete MONGE-Kugel) des Paraboloids. Da man nun dasselbe ebenso auf das hyperbolische Paraboloid übertragen kann, so erhält man:

Der Höhenpunkt eines jeden einem Paraboloid umgeschriebenen Tetraeders liegt in der MONGE-*Ebene desselben.*

Um daher einem Paraboloid F^2 ein orthozentrisches Tetraeder umzuschreiben, *muß* man seinen Höhenpunkt H in seiner MONGE-Ebene ϱ annehmen. Umschreibt man dann aus einem beliebigen Punkt D dem Paraboloid den Kegel und schneidet diesen mit der auf DH senkrechten Berührungsebene δ des Paraboloids im Kegelschnitt k^2, so wird jedes dem k^2 umgeschriebene Dreieck ABC, dessen Höhenpunkt $H_4 \equiv (DH, \delta)$ der Fußpunkt der Senkrechten DH ist, ein Kantendreieck eines der gewünschten Tetraeder $ABCD$ sein. Solche Tetraeder mit gemeinsamen Höhenpunkt H gibt es ∞^4, davon sind ∞^3 Polartetraeder oder Apolartetraeder für eine Kugel (FAURE-Kugel) deren Mittelpunkt H ist.

4. *Bestimmen wir nun den Ort der Höhenpunkte H derjenigen, der Fläche II. O. F^2 umgeschriebenen Tetraeder, welche einen gemeinsamen Eckpunkt D haben.*

Wir nehmen ein solches Tetraeder an und bezeichnen den Fußpunkt der aus D auf die Gegenseite δ gefällten Senkrechten h mit H_4, den Treffpunkt von h mit der zu δ parallelen Berührungsebene δ' mit H_4', die auf h liegende Sehne der MONGE-Kugel ϱ^2 von F^2 mit QQ', den Halbierungspunkt derselben mit M. Für einen außerhalb ϱ^2 liegenden Punkt H ist die Potenz dieses Punktes in Bezug auf ϱ^2 gleich

$$\overline{MH}^2 - MQ^2 = HH_4 . HD = (HM + MH_4)(MD - MH).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\overline{MD}^2 - \overline{MQ}^2 &= \overline{MD}^2 - \overline{MH}^2 + (HM + MH_4)(MD - MH)\\ &= (MD - MH)(MD + MH + HM + MH_4)\\ &= (MD - MH)(MD - MH_4')\\ &= DH . DH_4'.\end{aligned}$$

Nachdem die linke Seite der letzten Gleichung mit der Potenz des außerhalb ϱ^2 liegenden Punktes D in Bezug auf ϱ^2 gleich ist, so sind die Punkte H, H_4' harmonisch getrennt durch diejenige Kugel δ^2 (FAURE-Kugel), deren Mittelpunkt D und deren Halbmesserquadrat die obige Potenz dieses Punktes ist. H ist demnach der Pol der Berührungsebene δ' von F^2 bezüglich δ^2. Somit ist der Ort von H die Polarfläche F'^2 von F^2 bezüglich der FAURE-Kugel δ^2. Einen ähnlichen Beweis erhält man auch, wenn der Punkt H oder der Punkt D oder beide innerhalb der MONGE-Kugel ϱ^2 liegen, Wir haben daher den Satz:

Der Ort der Höhenpunkte H der einer Fläche II. O. F^2 umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder, die einen gemeinsamen Eckpunkt D haben, ist die Polarfläche von F^2 bezüglich der FAURE-*Kugel δ^2 vom Mittelpunkte D*, deren Halbmesserquadrat also der Potenz des Punktes D bezüglich der MONGE-Kugel der Fläche F^2 gleich ist.

5. Nimmt man den Eckpunkt D des der Fläche F^2 umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeders auf der Fläche selbst an, so fallen die drei in D zusammenstoßenden Seiten α, β, γ in der Berührungsebene $\overline{\alpha\beta\gamma}$ des Punktes D zusammen, die vierte Seite δ Tetraeders ist eine beliebige Berührungsebene von

F^2. Der Höhenpunkt H eines solchen Tetraeders $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ liegt ebenfalls auf der Polarfläche F'^2 von F^2 bezüglich der FAURE-Kugel δ^2 von F^2 mit dem Mittelpunkt D. Diese Fläche F'^2 ist ein Paraboloid; und wenn p die Polare der Normale DN des Flächenpunktes D nach F^2 bezeichnet, so ist die Polare p' von p nach δ^2 die Achse des Paraboloids F'^2, welche daher auf die Berührungsebene $\overline{\alpha\beta\gamma}$ senkrecht steht. Der Scheitel H_i dieses Paraboloids ist der Höhenpunkt desjenigen verkümmerten Tetraeders $\overline{\alpha\beta\gamma\delta_i}$, dessen Seitenebene δ_i parallel liegt mit der Berührungsebene δ_i' des anderen Schnittpunktes N der Normale DN mit der Fläche. Die Polarebenen der Treffpunkte der senkrechten konjugierten Tangenten des Punktes D mit der Geraden p in Bezug auf δ^2 sind die Symmetrieebenen des Paraboloids F'^2; diese Fläche wird daher ein Drehparaboloid, wenn D in einem Nabelpunkt von F^2 liegt.

Der Treffpunkt E der Normale DN mit dem Paraboloid F'^2 ist der Höhenpunkt desjenigen dem F^2 umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeders, dessen vierte Seite ebenfalls mit der Berührungsebene $\overline{\alpha\beta\gamma}$ von D koinzidiert; er ist somit der Pol der zu $\overline{\alpha\beta\gamma}$ parallelen Berührungsebene von F^2 in Bezug auf die Kugel δ^2. Die Polarebene ω des Mittelpunktes O der Fläche F^2 bezüglich δ^2 ist zugleich die Polarebene des Punktes D nach F'^2. Ist also I der Treffpunkt von ω mit der Normale DN, so halbiert E die Strecke DI und die über DI als Durchmesser beschriebene Kugel trifft die MONGE-Kugel von F^2 rechtwinkelig. Also:

Fallen alle vier Seiten eines der Fläche II. O. umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeders in der Berührungsebene des Flächenpunktes D, so ist der Höhenpunkt desselben der Mittelpunkt des die Fläche F^2 in D berührenden FAURE*-Kugel* (also seine MONGE-Kugel rechtwinkelig treffenden Kugel).

6. Für das Weitere beweisen wir folgenden Satz:

Sind zwei Seiten von zwei einer Fläche II. O. umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder parallel und ist der Gegeneckpunkt einer dieser Seiten für eines der Tetraeder der Höhenpunkt des anderen, so ist diese Eigenschaft gegenseitig.

Das der Fläche F^2 umgeschriebene Tetraeder $ABCD$ habe H

zum Höhenpunkt, H_4 zum Höhenfußpunkt auf der Seite ABC und die zu dieser Seite parallele Berührungsebene der Fläche möge den ihr aus H umgeschriebenen Kegel im Kegelschnitt k^2, die Höhe DH im Punkte I treffen, endlich sei EFG ein dem Kegelschnitt k^2 umgeschriebenes Dreieck vom Höhenpunkt I. Wir wollen nun beweisen, daß *der Höhenpunkt H' des Tetraeders $EFGH$ mit D koinzidiert.*

Da nämlich die Punkte H_4, I vom Mittelpunkt der MONGE-Kugel der F^2 gleichen Abstand haben, so ist auch ihre Potenz in Bezug auf diese Kugel gleich und da diese nach (1) bzw. mit den Produkten $DI.HH_4$, $HH_4.H'I$ gleich ist, so folgt der Satz. Wir können auch sagen (4):

Der Ort der Eckpunkte der ∞^3 der Fläche II. O. F^2 umgeschriebenen Tetraeder mit den gemeinsamen Höhenpunkt H und der Ort der Höhenpunkte der F^2 umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder, die in H einen gemeinsamen Eckpunkt haben, ist die Polarfläche F'^2 von H bezüglich der FAURE-*Kugel δ^2 von F^2 mit dem Mittelpunkt H.*

Die Fläche F'^2 geht durch die Kurve, in welcher der MONGE-*Kegel des aus H der Fläche F^2 umgeschriebenen Kegels die* MONGE-*Kugel von F^2 trifft.*

Ist nämlich (um den letzten Teil zu rechtfertigen) P ein Punkt dieser Kurve, so sind die aus der Geraden HP zu diesem MONGE-Kegel (und zu F^2) geführten Berührungsgebenen senkrecht, und die im Punkte P auf HP errichtete senkrechte Ebene ist ebenfalls eine Berührungsebene von F^2. Diese drei Ebenen und irgend eine mit H inzidente Berührungsebene von F^2 bilden ein besonderes der Fläche F^2 umgeschriebenes orthozentrisches Tetraeder, dessen Höhenpunkt P ist; somit liegt P auf F'^2. Übrigens ist P der Pol der auf HP senkrechten zweiten Berührungsebene in Bezug auf die Kugel δ^2.

7. Die Art von F'^2 drückt im allgemeinen folgender Satz aus:

«Der Ort F'^2 der Eckpunkte der einer Fläche II. O. F^2 umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder mit dem gemeinsamen Höhenpunkt H ist ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid, wenn F^2 elliptische Punkte hat und H innerhalb, bzw.

außerhalb F^2 liegt; wenn aber F^2 ein einschaliges Hyperboloid ist, so wird auch F'^2 ein einschaliges Hyperboloid sein (insoferne H nicht ein Punkt von F^2 ist).»

Liegt H auf der MONGE-Kugel von F^2, so ist F'^2 ein gleichseitiger Kegel, nämlich der MONGE-Kegel des aus H der Fläche F^2 umgeschriebenen Kegels.

Ist H ein Punkt der Fläche F^2, so ist F'^2 ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, je nachdem F^2 elliptische oder hyperbolische Punkte hat. Nimmt man H im Nabelpunkt von F^2 an, so wird F'^2 ein Drehparaboloid; ist endlich H der Treffpunkt von zwei normalen Erzeugenden der F^2, so besteht F'^2 aus diesen zwei Erzeugenden und der Flächennormale des Punktes H.

Ist F^2 ein Paraboloid und nimmt man, wie es sein muss, den Höhenpunkt H in seiner MONGE-Ebene an, so erfüllen die Eckpunkte der F^2 umgeschriebenen Tetraeder mit dem Höhenpunkt H den ganzen Raum, und wir können daher diesen noch die Bedingung auferlegen, daß sie Polar- oder Apolartetraeder seien bezüglich einer Kugel δ^2 vom Mittelpunkt H.

Der aus H dem Paraboloid F^2 umgeschriebene Kegel ist ein planargleichseitiger und sein Polargebilde bezüglich δ^2 ist ein unendlichferner Kegelschnitt der aus H durch einen gleichseitigen Kegel projiciert wird. Also:

«Der Ort der Eckpunkte der einem Paraboloid umgeschriebenen Tetraeder, die einen gemeinsamen Höhenpunkt H haben, und die zugleich Polar- oder Apolartetraeder sind bezüglich einer aus H als Mittelpunkt beschriebenen Kugel, ist ein ein- bzw. zweischaliges gleichseitiges Hyperboloid, je nachdem das Paraboloid hyperbolisch oder elliptisch ist.»

8. Untersuchen wir nun, bei welcher Lage des Punktes H bezüglich der Fläche F^2 wird die Fläche F'^2 eine *Drehfläche?* Diesbezüglich benützen wir folgenden Satz:

Ist k'^2 der Polarkegelschnitt eines Kegelschnitts k^2 bezüglich eines Kreises d^2 vom Mittelpunkt H, ist ferner HNT das bei H rechtwinkelige Polardreieck von k^2, und sind endlich n' und t' die Polaren der Punkte N und T bezüglich d^2: so ist von den Achsen n', t' des Kegelschnitts k'^2 diejenige die Fokalachse, deren

Treffpunkte mit den Achsen des Kegelschnitts k^2 vom Mittelpunkt des Kegelschnitts k'^2 nicht getrennt sind.

Die in den Eckpunkten des Dreieckes HNT zusammenstoßende Seitenpaare und die durch die Eckpunkte zu den Achsen von k^2 parallele Strahlenpaare sind zugeordnete Strahlen von drei Involutionen; die Polaren der Doppelstrahlen dieser Involutionen nach d^2 sind die Brennpunkte von k'^2.

Nämlich die zwei durch H zu den Achsen von k^2 parallel gelegte Strahlen sind konjugierte Polaren von k'^2, also sind die Treffpunkte derselben mit den Achsen n', t' von k'^2 durch die Brennpunkte dieses Kegelschnitts harmonisch getrennt.

Wir kehren jetzt zur gestellten Frage zurück und nehmen H auf einem Fokalkegelschnitt f^2 in der Symmetrieebene ε der Zentralfläche F^2 an; t sei die Tangente des Punktes H auf f^2; T der Schnittpunkt von ε mit der Polaren t_1 von t nach F^2; d^2 der Schnittkreis von ε mit der FAURE-Kugel δ^2 vom Mittelpunkt H der Fläche F^2. Die Gerade $TH=n$ ist eine Normale von f^2 und HNT ein Polardreieck des Hauptschnittes $(F^2, \varepsilon)=k^2$ der Fläche.

Die sich in t treffenden konjugierten Polarebenen der Fläche F^2 bilden eine orthogonale Ebeneninvolution. Polarisiert man ihre Pole, d. h. die auf t_1 liegenden konjugierten Pole der Fläche F^2 nach der FAURE-Kugel δ^2, so erhält man ebenfalls eine orthogonale Ebeneninvolution mit der in ε liegenden und zu t parallelen Achse t'. Die zugeordneten Ebenen der letzteren sind aber konjugierte Polarebenen von F'^2, also ist diese Fläche eine Drehfläche mit der Achse t'.

Um die Art von F'^2 auf Grund des früheren Satzes und der obigen Bemerkungen zu bestimmen, nehme man z. B. an, daß die Fläche F^2 ein Ellipsoid und H ein Punkt seiner in der Ebene ε liegenden Fokalellipse f^2 sei. F'^2 wird in diesem Falle ein Drehellipsoid mit Fokalkreis sein; denn die Achsen n', t' der Polarellipse k'^2 der Ellipse $k^2=(F^2, \varepsilon)$ in Bezug auf den Kreis $d^2=(\delta^2, \varepsilon)$ sind die Polaren der Eckpunkte N, T des bei H rechtwinkeligen Polardreieckes HNT von k^2; HT ist die Normale von f^2 und t' die Drehachse von F'^2.

Ist aber f^2 die Fokalhyperbel des Ellipsoids F^2, so wird

F'^2 ein Drehellipsoid oder Drehhyperboloid mit zwei Brennpunkten oder ein Drehparaboloid sein, je nachdem H innerhalb, außerhalb oder auf F^2 selbst liegt.

Im Allgemeinen können wir sagen:

Liegt der Höhenpunkt H der einer Fläche II. O. F^2 umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder auf einer Fokallinie f^2 von F^2, so ist der Ort ihrer Eckpunkte eine Drehfläche II. O. F'^2, deren Drehachse in der Ebene von f^2 mit der Tangente seines Punktes H parallel läuft.

F'^2 hat einen Fokalkreis, wenn F^2 ein Ellipsoid und f^2 eine Ellipse, oder wenn F^2 ein zweischaliges Hyperboloid und f^2 eine Hyperbel ist; ferner ist F'^2 ein Ellipsoid mit zwei Brennpunkten, wenn F^2 ein Ellipsoid und f^2 eine Hyperbel, oder wenn F^2 ein zweischaliges Hyperboloid und f^2 eine Ellipse ist und der Punkt H innerhalb F^2 liegt. Wenn hingegen in letzteren Fällen der Punkt H noch auf der Fläche F^2 selbst ist, wird F'^2 ein Drehparaboloid sein; und wenn er außerhalb F'^2 ist, so ist F'^2 ein zweischaliges Hyperboloid.

Ist endlich F^2 ein einschaliges Hyperboloid, so wird F'^2 für jeden Punkt H auf seinen Fokallinien ebenfalls ein einschaliges Hyperboloid sein.

Und bezüglich der Paraboloide haben wir:

Ist der Höhenpunkt H der einem Paraboloid F^2 umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder der Treffpunkt seiner Monge-*Ebene ϱ mit einer Fokalparabel derselben, und sind diese noch Polar- oder Apolartetraeder bezüglich einer Kugel vom Mittelpunkt H: dann ist der Ort ihrer Eckpunkte ein die Ebene ϱ im Punkte H berührendes gleichseitiges ein- oder zweischaliges Drehhyperboloid F'^2, je nachhdem F^2 ein hyperbolisches oder elliptisches Paraboloid ist.*

9. Die Fläche F'^2 wird eine Kugel, wenn der Polarbündel des Punktes H bezüglich der Fläche F^2 ein orthogonales ist, also muß F^2 eine Drehfläche und H einer seiner Brennpunkte sein. Daraus ergibt durch eine einfache Rechnung:

Sind H, H' die Brennpunkte, $2a$ die Hauptachse eines Drehhyperboloids oder Drehellipsoids F^2, dann ist der Ort der Eckpunkt der diesem umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder

die in H ihren Höhenpunkt haben, eine Kugel F'^2, deren Halbmesser gleich 6a ist und deren Mittelpunkt bezüglich H' zum Mittelpunkt von F^2 symmetrisch liegt.

Auch die Umkehrung des Satzes kann man leicht beweisen:

Ist nämlich O' der Mittelpunkt, DD' eine Sehne einer Kugel F'^2, H ein beliebiger Punkt der Sehne und teilt der Punkt E die Strecke HD' nach dem Verhältnis $HE:ED'=1:2$, so ist die in diesem Punkte auf die Sehne errichtete senkrechte Ebene δ die Gegenseite eines der Kugel F'^2 eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders, dessen Höhenpunkt in H liegt.

Der auf der Geraden HO' liegende Punkt O, welcher die Gleichung $HO=\frac{1}{3}HO$ befriedigt, ist der Mittelpunkt einer durch E gehender Kugel ω^2, deren Halbmesser das Drittel des Halbmessers von F'^2 gleich ist. Die Ebene δ ergibt sich aber mit Hilfe der Kugel ω^2 und dem Punkt H dadurch, daß man H mit einem (beliebigen) Punkt E von ω^2 durch eine Gerade verbindet und auf dieser im Punkte E die senkrechte Ebene δ errichtet. Diese Ebenen umhüllen aber bekanntlich eine Drehfläche II. O., für die H ein Brennpunkt ist und deren Drehachse durch O gehend ein Drittel des Durchmessers von F'^2 ist.

Endlich kann man leicht finden:

Ist F'^2 die Polarfläche einer Fläche II. O. F^2 in Bezug auf die Monge*-Kugel der letzteren, so kann man dieser Fläche F^2 orthozentrische Tetraeder umschreiben, welche jener Fläche F'^2 eingeschrieben sind und deren Höhenpunkt ihr gemeinsamer Mittelpunkt ist.*

3.

DIE ORTHOZENTRISCHEN POLARTETRAEDER DER FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.[1]

Von L. KLUG.

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 9. Dec. 1924.*

1. Jede Fläche II. O. F^2 hat ∞^4 orthozentrische Polartetraeder; jeder Raumpunkt ist ein Eckpunkt oder auch Höhenpunkt für ∞^1 solcher Polartetraeder.

Trifft die Polarebene δ des Punktes D die Fläche II. O. F^2 in dem Kegelschnitt k^2, und ist N der Fußpunkt der aus dem Punkte D auf die Ebene δ gefällten Senkrechten: so sind alle (∞^1) Polardreiecke ABC des Kegelschnitts k^2, deren Höhenpunkt N ist, Kantendreiecke der ∞^1 orthozentrischen Tetraeder $ABCD$ der Fläche F^2. Der Ort der Eckpunkte dieser Kantendreiecke ABC ist eine durch die unendlichfernen Punkte der Achsen und durch den Mittelpunkt des Kegelschnitt, sowie auch durch N gebende (gleichseitige) Hyperbel k^2, welche den konjugierten Durchmesser des auf NM senkrechten Durchmessers von k^2 berührt und deren Polarfigur bezüglich k^2 daher eine die Achsen von k^2 berührende Parabel p^2 ist, die MN zur Leitlinie hat. Die Fußpunkte der aus N auf k^2 gefällten Normalen sind daher die Treffpunkte von k^2 und h^2, während die gemeinsamen Tangenten von k^2 und p^2 die Polaren dieser Treffpunkte bezüglich k^2 sind.

2. Bestimmen wir diejenigen Polartetraeder der Fläche F^2, deren Höhenpunkt der gegebene Punkt E ist.

---

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: *A másodrendű felületek orthocentrikus polártetraéderei.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő XLII., (1926), p. 88—95.

Durch den Punkt E kann man einen Strahl h legen, der zu seiner Polaren bezüglich F^2 senkrecht steht. Es sei N der Treffpunkt von h mit der zu ihm senkrechten und durch die Polare von h gelegten Ebene δ, k^2 der Schnitt dieser Ebenen mit F^2, D der mit h inzidente Pol der Ebene δ nach F^2, endlich c^2 der in der Ebene δ aus dem Mittelpunkt N mit dem Halbmesser $(ND.NE)^{\frac{1}{2}}$ beschriebene Kreis. Ist ABC das gemeinsame Polardreieck des Kegelschnitts k^2 und des (reellen oder imaginären) Kreises c^2, so ist $ABCD$ ein solches Polartetraeder der Fläche F^2, dessen Höhenpunkt mit E inzident ist. Also:

Um ein Polartetraeder einer Fläche II. O. zu bestimmen, dessen Höhenpunkt der gegebene Punkt E ist, legen wir durch E einen Strahl h, der auf der Polarebene δ eines seiner Punkte D nach F^2 senkrecht steht; der Punkt D ist schon ein Eckpunkt des gewünschten Tetraeders und in δ liegt seine Gegenseite ABC. Dieses Dreieck ABC ist gemeinsames Polardreieck des Kegelschnitts $k^2=(F^2, \delta)$, in welchen δ die Fläche F^2 trifft, und des (reellen oder imaginären) Kreises c^2 vom Mittelpunkt $N=(h, \delta)$ und vom Halbmesser $(ND.NE)^{\frac{1}{2}}$. Die Anzahl dieser Polartetraeder ist also ∞^1 und ihre Konstruktion ist vom dritten Grade.

3. Bestimmen wir den Ort der Scheitel und der Seiten derjenigen ∞^1 Polartetraeder einer Fläche II. O. F^2, die einen gemeinsamen Höhenpunkt E haben.

Diejenigen Strahlen h des Punktes E, welche auf ihre Polaren bezüglich der Fläche F^2 senkrecht stehen, liegen auf einem gleichseitigen Kegel E^2; ihre Polaren aber umhüllen in der Polarebene ε des Punktes E nach F^2 einen parabolischen Strahlenbüschel ε^2 II. O. Auf dem Kegel E^2 liegen der Mittelpunkt der Fläche F^2, die unendlichfernen Punkte der Achsen derselben, sowie auch die aus E auf die Ebene ε gefällte Senkrechte m; zum Strahlenbüschel ε^2 aber gehören die Polare von m und die Strahlen, in welchen die Symmetrieebenen der F^2 die Ebene ε treffen. Jene Punkte und jene Gerade bestimmen den Kegel E^2, diese Srahlen aber bestimmen den Büschel ε^2.

Die aus den Strahlen des Büschels ε^2 auf ihre Polaren bezüglich F^2 gefällte senkrechte Ebenen bilden einen Ebenen-

büschel III. O., dem die Ebene ε, die unendlichferne Ebene und die Symmetrieebenen von F^2 angehören; darum schmiegen sich seine Ebenen einer Raumparabel p^3 an. Das Polargebilde dieser Raumparabel p^3 nach F^2 ist eine auf dem Kegel E^2 liegende und durch den Scheitel E, durch den Mittelpunkt M und durch die unendlichfernen Punkte der Achsen der Fläche F^2 gehende, also gleichseitige Raumhyperbel l^3.

Nachdem die Verbindungsgerade von E mit einem beliebigen Punkte P der Raumhyperbel auf der Polarebene dieses Punktes P bezüglich F^2 senkrecht steht: so ist die Tangente des Punktes E der Raumhyperbel senkrecht auf die zum Durchmesser EM konjugierten Durchmesserebene der Fläche F^2. Also:

Der Ort der Scheitel der ∞^1 Polartetraeder einer Fläche II. O. F^2, die im Punkte E einen gemeinsamen Höhenpunkt haben, ist eine durch den Punkt E, durch den Mittelpunkt M und durch die unendlichfernen Punkte der Achsen der Fläche F^2 gehende Raumhyperbel l^3, deren Tangente im Punkte E zu der Polarebene dieses Punktes nach F^2 senkrecht steht und deren Tangente im Punkte M der zu den auf EM senkrechten Ebenen konjugierte Durchmesser ist. Ist die Fläche F^2 ein Paraboloid, so wird seine Achse eine Asymptote der Raumhyperbel, während die anderen zwei Asymptoten auf je eine der Symmetrieebenen senkrecht stehen.

Die Seiten dieser ∞^1 Polartetraeder bilden einen Ebenenbüschel III. O., der sich einer besonderen Raumparabel p^3 anschmiegt.

Die gleichseitige Raumhyperbel l^3 bleibt unverändert, wenn die Fläche F^2 durch irgend eine zu ihr konzentrisch-homothetische Fläche ersetzt, bzw. wenn das Paraboloid F^2 in der Richtung seiner Achse verschoben wird; aber es ändern sich die in l^3 eingeschriebene Polartetraeder derselben. Insgesamt gibt es ∞^2 solche Polartetraeder, u. zw. gehören zu jeder Fläche jenes konzentrisch-homothetischen Büschels ∞^1. Endlich sind die Strahlen jenes Kegels II. O., welcher die Raumhyperbel l^3 aus seinem Punkte E projiciert, Normalen der einzelnen Flächen des Büschels in jenen Punkten, in welchen sie von l^3 getroffen werden.

4. Führt man durch einen Punkt zu den Schmiegungsebenen einer Raumparabel parallele Ebene, so wird durch diese einen Kegel II. O., den man ihren «Richtungskegel» nennen kann, eingehüllt. Der Richtungskegel der Raumparabel p^3 des obigen Satzes ist insofern ein besonderer, daß seine Berührungsebenen in ∞^1 orthogonale Dreikanten zerlegt werden können. Er ist also der reciproke Kegel eines gleichseitigen, und wir wollen ihn *planar-gleichseitig* nennen, während die Raumparabel, die einen solchen Richtungskegel hat, *gleichseitig* heiße. Wir können nun beweisen:

Die Schmiegungsebenen einer gleichseitigen Raumparabel spalten sich zu dreien in ∞^1 orthogonale Dreikanten, deren Scheitel auf einer Geraden liegen; die orthogonale Projektion dieser Geraden auf einer beliebigen Schmiegungsebene τ der Raumparabel ist die Leitlinie derjenigen ebenen Parabel p^2, welche von den übrigen Schmiegungsebenen in τ umhüllt wird.

Projiciert man nämlich (senkrecht) den Scheitel eines beliebigen der Dreikante auf die Schmiegungsebene τ, so erhält man den Höhenpunkt des Dreieckes, in welchen τ das Dreikant trifft und dessen Seiten also p^2 berühren; daher liegt der Höhenpunkt auf der Leitlinie von p^2. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Ortsgerade der Scheitel der sich einer gleichseitigen Raumparabel anschmiegenden orthogonalen Dreikante können wir, nach der analogen Eigenschaft der Leitlinie der ebenen Parabel, ihre *Leitlinie* nennen.

Die Leitlinie der gleichseitigen Raumparabel des früheren Satzes ist die Gerade EM, welche durch den Mittelpunkt M der Fläche F^2 und durch den Höhenpunkt E der Polartetraeder geht.

Man kann aber auch unabhängig von der Fläche F^2 eine gleichseitige Raumparabel wie folgt erzeugen: Schreibt man in den Seiten bc, ca eines orthogonalen Dreikants abc je eine Parabel ein, welche die Kanten b, c, bzw. c, a berühren, u. zw. die Kante c in verschiedenen Punkten, so bilden die Berührungsebenen dieser zwei Parabeln die Schmiegungsebenen einer gleichseitigen Raumparabel. Die in den Leitlinien der zwei ebenen Parabeln auf ihren Ebenen errichtete senkrechte Ebenen treffen sich in der Leitlinie der Raumparabel.

5. Die Schmiegungsebenen der gleichseitigen Raumparabel p^3 lassen sich auf ∞^2 Weisen zu vieren zu solchen Tetraederseiten vereinigen, die einen gemeinsamen Höhenpunkt E haben.

Es seien E und M zwei Punkte der Leitlinie l der Raumparabel p^3; ε_1, ε_2, ε_3 und μ_1, μ_2, μ_3 die in E, bzw. M zusammenstoßende Schmiegungsebenen; ε eine beliebige, μ aber die unendlichferne Schmiegungsebene derselben. Dann bestimmen die zwei Tetraeder $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\mu\mu_1\mu_2\mu_3$ als Polartetraeder eine Fläche II. O. F^2 und die Seiten der ∞^1 Polartetraeder der F^2 die E zum Höhenpunkt haben, schmiegen sich einer gleichseitigen Raumparabel an. Zu diesen Polartetraedern gehören auch die zwei obigen, also fällt diese gleichseitige Raumparabel mit p^3 zusammen. Da man nun M auf der Leitlinie von p^3, die Schmiegungsebene ε aber in ihrem Schmiegungsbüschel ∞^1-mal annehmen kann, ist die Behauptung bewiesen.

Sind die Seiten eines Tetraeders Schmiegungsebenen einer Raumparabel, so wollen wir sagen, daß das Tetraeder der Raumparabel umgeschrieben, diese aber dem Tetraeder eingeschrieben ist.

Will man einer gegebenen gleichseitigen Raumparabel p^3 ein orthozentrisches Tetraeder umschreiben, so fällt man aus einem Punkte E seiner Leitlinie l die Senkrechte m auf einer Schmiegungsebene δ derselben; die aus einem beliebigen Punkte D von m zu der Raumparabel gelegten Schmiegungsebenen α, β, γ bilden mit δ zusammen die Seiten eines solchen Tetraeders, dessen Höhenpunkt E ist. Also:

Der Ort der Höhenpunkte der einer gleichseitigen Raumparabel umgeschriebenen orthozentrischen Tetraeder ist die Leitlinie derselben.

6. Untersuchen wir ob der Höhenpunkt jedes einer gleichseitigen Raumhyperbel l^3 eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeders auf l^3 liegt (wie wir dies im Satze Nr. 3 für den Punkt E sahen)?

Die gleichseitige Raumhyperbel l^3 wird aus jedem ihrer Punkte durch gleichseitige Kegel projiciert. Daraus folgt, daß die Höhenstrahlen der Dreikante der in l^3 eingeschriebenen Tetraeder ihre Bisekanten sind. Ist das Tetraeder orthozentrisch,

sind also die Höhenstrahlen seiner Dreikante zugleich seine Höhen, so können sich diese nur auf der Raumhyperbel treffen. Also:

Die einer gleichseitigen Raumhyperbel eingeschriebenen orthozentrischen Tetraeder haben ihren Höhenpunkt auf der Kurve.

Wir können dies auch in einer anderen Weise begründen: Nämlich jede durch die gleichseitige Raumhyperbel l^3 gelegte Regelfläche II. O. ist entweder ein gleichseitiges Hyperboloid oder ein gleichseitiges Paraboloid; also hat jede Unisekante von l^3 zwei sie treffende und auf diese, also auch auf einander senkrechte Bisekanten. Trifft nun eine Ebene δ die l^3 in den Eckpunkten des Dreieckes ABC und ist H sein Höhenpunkt, so hat l^3 eine die Gerade AH treffende und auf AH und BC, also auf die Ebene δ senkrechte Bisekante; ebenso gibt es eine die Gerade BH treffende und auf δ senkrechte, also im Punkte H auf die Ebene δ senkrechte Bisekante, welche l^3 in den Punkten D und E schneidet. Das orthogonale Tetraeder $ABCD$ ist nun den zwei durch l^3 und die Unisekante AH, resp durch l^3 und die Unisekante BH gehenden gleichseitigen Hyperboloiden (oder Paraboloiden) eingeschrieben, also liegt der Höhenpunkt derselben auf beiden Flächen, somit auch auf l^3 und ist der Punkt E.

Als Folgerung dieses Satzes hat man:

Jede auf einer Bisekante einer gleichseitigen Raumhyperbel senkrechte (also überhaupt jede) Ebene trifft die Raumhyperbel in den Eckpunkten eines Dreieckes, dessen Höhenpunkt auf der Bisekante liegt. Und auch umgekehrt: die im Höhenpunkt eines der gleichseitigen Raumhyperbel eingeschriebenen Dreieckes auf seiner Ebene errichtete Senkreckte, ist eine Bisekante derselben.

Die zwei gleichseitigen Kegel, welche die gleichseitige Raumhyperbel l^3 aus ihren, auf der angenommenen Bisekante liegenden zwei Punkten D, E projicieren, treffen nämlich die auf der Bisekante DE senkrechte Ebene δ in zwei gleichseitige Hyperbeln; die gemeinsamen Punkte der letzteren aber sind die Eckpunkte eines Dreieckes und der Höhenpunkt desselben.

Aus dem Satze folgt:

«Jeder Raumpunkt ist Höhenpunkt eines einer gleichseitigen Raumhyperbel eingeschriebenen Dreieckes; die Ebene desselben steht senkrecht auf die mit dem Raumpunkt inzidenten Bisekante der Raumhyperbel.»

«Zwei sich rechtwinkelig kreuzende Bisekanten einer gleichseitigen Raumhyperbel treffen dieselbe in den Eckpunkten eines orthogonalen Tetraeders.»

«Jede auf einer Tangente einer gleichseitigen Raumhyperbel senkrechte Ebene trifft diese in drei Punkten, welche aus dem Berührungspunkte der Tangente durch ein orthogonales Dreikant projiciert werden.» Also:

«Die Punkte der gleichseitigen Raumhyperbel vereinigen sich einfach unendlich vielmal zu ∞^1 Punkttripeln, die aus den Punkten der Raumhyperbel durch orthogonale Dreikante projiciert werden können; jeder Punkt derselben kommt in ∞^1 Punkttripeln vor.»

«Einer gleichseitigen Raumhyperbel kann man ∞^3, ∞^2, ∞^1 oder zwei orthozentrische Tetraeder einschreiben, die bzw. keinen, einen, zwei oder drei gemeinsame Eckpunkte haben.»

7. *Durch fünf Raumpunkte in allgemeiner Lage kann man keine gleichseitige Raumhyperbel legen.*

Es seien A, B, C, D, E die fünf Raumpunkte. Die zwei gleichseitigen Kegel, welche man den zwei Vierkanten $E(ABCD)$, $D(ABCE)$ umschreiben kann, treffen sich in einer Raumkurve III. O. c^3 und in ihrer Bisekante DE. Wäre nun diese Raumkurve eine gleichseitige Raumhyperbel, so müßte die im Höhenpunkt des Dreieckes ABC auf seine Ebene errichtete Senkrechte s (Nr. 6) eine Bisekante derselben sein, also beide gleichseitige Kegel in demselben Punktpaare treffen. Dies findet aber im Allgemeinen nicht statt, da das Punktpaar schon durch den einen Kegel, z. B. den dem Vierkant $D(ABCE)$ umgeschriebenen, und durch s bestimmt ist und man den Scheitel E des zweiten Kegels auf dem Strahl DE wo immer annehmen kann, wodurch sich die Treffpunkte von s mit dem veränderlichen Kegel sich ebenfalls ändern. Ist aber der Punkt E auf dem durch die Höhen des Tetraeders $ABCD$ gehenden gleichseitigen Hyperboloid H^2, so werden diese Höhen, da die Höhenstrahlen der Dreikante

des Tetraeders Bisekanten der Raumkurve c^3 sind, Unisekanten von dieser sein. Folglich werden die in den Höhenpunkten der Kantendreiecke des Tetraeders auf ihre Ebenen errichteten Senkrechten (als Transversalen der letzteren) ebenfalls Bisekanten von c^3 sein, somit wird die im Höhenpunkt des Dreieckes ABC auf seine Ebene errichtete Senkrechte s beide gleichseitige Kegel in demselben Punktpaar treffen. Also:

Die einem allgemeinen Tetraeder umgeschriebenen ∞^1 gleichseitig Raumhyperbeln liegen auf dem gleichseitigen Hyperboloid der vier Tetraederhöhen; die einem Dreikant des Tetraeders umgeschriebenen (∞^1) gleichseitige Kegel treffen das Hyperboloid in je einer dieser gleichseitigen Raumhyperbel.

8. *Die Schmiegungsebenen der einem Tetraeder umgeschriebenen gleichseitigen Raumhyperbeln in einem Eckpunkte des Tetraeders umhüllen einen Kegel II. O., der dem zu jenem Eckpunkt gehörigen Dreikant des Tetraeders eingeschrieben ist und die Ebene, welche die Dreikantshöhe mit aus diesem Eckpunkt ausstrahlenden Tetraederhöhe verbindet, in der Dreikantshöhe berührt.*

Ist nämlich $ABCD$ ein Tetraeder, h_4 die aus D ausstrahlende Tetraederhöhe, h_d die Höhe des Dreikants $D(ABC)$, so trifft die Ebene $h_d h_4$ den dem Vierkant $D(ABCh_d)$ umgeschriebenen Kegelbüschel II. O. in einem Strahlenbüschel, dessen Strahlen die dem Tetraeder umgeschriebenen gleichseitigen Raumhyperbeln berühren. Da nun die Berührungsebenen dieser Kegel längs jener Strahlen des Büschels zugleich Schmiegungsebenen dieser Raumhyperbeln sind, so ist ihr geometrischer Ort: der dem Dreikant $D(ABC)$ eingeschriebene und die Ebene $h_d h_4$ in dem Strahl h_d berührende Kegel II. O. — (Der Satz läßt sich übrigens leicht verallgemeinern auf die ∞^1 durch vier Punkte einer Regelfläche II. O. gehenden und auf dieser liegenden Raumkurven III. O.)

9. Die vier Höhen eines allgemeinen Tetraeders und die vier Höhen seiner vier Dreikante liegen auf einer Regelfläche II. O., und die aus einem Punkt auf diese errichtete acht senkrechte Ebenen berühren einen planar-gleichseitigen Kegel und treffen daher die unendlichferne Ebene in acht Strahlen eines

besondern Strahlenbüschels s^2_∞. Während also das Hyperboloid H^2 der vier Höhen und der vier Dreikantshöhen eines allgemeinen Tetraeders der Punktort der dem Tetraeder umgeschriebenen ∞^1 gleichseitigen Raumhyperbeln ist: ergibt der Strahlenbüschel II. O. s^2_∞, der die unendlichferne Geraden der auf jene acht Geraden senkrechten Ebenen enthält, den Ebenenort der Schmiegungsebenen der dem Tetraeder eingeschriebenen ∞^1 gleichseitigen Raumparabeln. Ist aber das Tetraeder orthozentrisch, so erhalten wir weder einen Punktort, noch einen Ebenenort, indem man durch jeden Raumpunkt eine dem Tetraeder umgeschriebene gleichseitige Raumhyperbel legen kann und jede Ebene ist Schmiegungsebene einer dem Tetraeder eingeschriebenen gleichseitigen Raumparabel. Aus alldem heben wir hervor:

Fünf allgemeine Ebenen können nicht Schmiegungsebenen einer gleichseitigen Raumparabel sein.

Die ∞^2 Schmiegungsebenen der einem Tetraeder eingeschriebenen ∞^1 gleichseitigen Raumparabeln sind parallel mit den ∞^1 Berührungsebenen eines solchen planar-gleichseitigen Kegels, welcher mit den Tetraederseiten parallele Berührungsebenen hat; ferner gehören die ∞^1 Leitlinien dieser Raumparabeln mit den Tetraederhöhen zu der nämlichen Regelschaar; endlich schmiegt sich eine Seitenfläche des Tetraeders den Raumparabeln in den Punkten einer dem Kantendreieck des Tetraeders in dieser Seitenfläche umgeschriebenen Parabel an, deren Leitlinie parallel liegt mit derjenigen Geraden, welche den Höhenpunkt des Kantendreieckes mit dem Fußpunkt der Tetraederhöhe verbindet.

Es sei K^2_d derjenige planar-gleichseitige Kegel, der dem Dreikant $D(ABC)$ des Tetraeders eingeschrieben ist und die zur Seite $\delta = ABC$ parallele Ebene δ', sowie die auf der Höhe des *Dreikants* $D(ABC)$ senkrechte Ebene berührt, der also die Ebene δ in einer dem Dreieck ABC eingeschriebenen Parabel p^2_d schneidet, deren Leitlinie durch den Höhenpunkt H_d des Dreieckes und den Höhenfußpunkt H_4 der Tetraederhöhe DH_4 geht. Führt man dann zu irgend zwei Berührungsebenen ε', φ' des Kegels K^2_d parallele Berührungsebenen ε, φ zu irgendeiner Parabel p^2 der dem Dreieck ABC eingeschriebenen Schaar,

so sind ε und φ und die Tetraederseiten Schmiegungsebenen einer gleichseitigen Raumparabel p^3. Deren Schmiegungspunkt mit δ ist der Berührungspunkt der aus dem unendlichfernen Punkt P der Parabel p_d^3 zu p^2 geführten Tangente. Da der geometrische Ort der Schmiegungspunkte die Parabel p_d^3 im Punkte P berührt, und dieser Punkt auf einer zur Geraden $H_d H_4$ Senkrechten liegt, so ist auch der letzte Teil des Satzes bewiesen.

Dieser letzte Teil des Satzes kann verallgemeinert so ausgesprochen werden:

«Nimmt man in der Ebene ε einen Strahlenbüschel II. O. ε^2 an, der sich dem Kegelschnitt e^2 anschmiegt und legt durch vier Strahlen desselben vier Ebenen α, β, γ, δ die ein Tetraeder bilden, dann sind diese vier Ebenen, ferner die Ebene ε und irgendeine durch einen Strahl t des Büschel ε^2 gelegte Ebene τ, Schmiegungsebenen eines bestimmten Raumkegelschnitts k^3. Durch Veränderung des Strahles t im Büschel ε^2 und Veränderung der Ebene τ um die Achse erhalten wir nur ∞^1 Raumkegelschnitte k^3. Die Schmiegungspunkte derselben mit irgendeine Tetraederseite, z. B. mit δ, liegen auf dem, dem Kantendreieck des Tetraeders umschriebenen Kegelschnitt, der den Kegelschnitt e^2 berührt».

Der duale Satz desselben lautet:

«Durch den Scheitel E des Kegels II. O. E^2 und durch die fünf Punkte A, B, C, D, T desselben geht ein auf E^2 liegenden Raumkegelschnitt k_t^3. Mit Veränderung des Punktes T erhält man ∞^1 solche Raumkegelschnitte. Die Schmiegungsebenen derselben in einem Eckpunkte D des Tetraeders, umhüllen einen Kegel II. O., der dem Dreikant $D(ABC)$ eingeschrieben ist und den Kegel E^2 im Strahle DE berührt».

4.

ÜBER MEHRFACH INVOLUTORISCHE PUNKTGRUPPEN.

Von L. KLUG.

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 14. Dec. 1925.*

Die Geraden der Ebene eines Viereckes treffen die Seiten desselben in sechs Punkten die involutorisch liegen, oder eine Involution, und auch wie wir noch sagen wollen: ein *involutorisches Sechspunkt* bilden. Unter diesen Geraden sind solche, deren sechs Treffpunkte mit den Seiten des Viereckes in zwei-, drei- oder vierfacher Weise Involutionen bilden. Die Bestimmung der Lage dieser Geraden, sowie die Konstruktion von solchen Sechspunkten einer involutorischen Reihe, welche in mehrfacher Weise involutorisch liegen, ist der Gegenstand dieser Arbeit.

*

1. Wir bezeichnen die Diagonalpunkte des Viereckes $PQRS$ mit $X=(QR, PS)$, $Y=(RP, QS)$, $Z=(PQ, RS)$ und die Seiten des Diagonaldreieckes mit $x=YZ$, $y=ZX$, $z=XY$ (Fig. 1). Diese treffen bzw. die Gegenseiten QR, SP; RP, SQ; PQ, SR des Viereckes in den Eckpunkten eines Vierseits $pqrs$; dessen Seiten p, q, r, s sind die (harmonischen) Polaren der Punkte P, Q, R, S in bezug auf die Dreiecke QRS und qrs, bzw. RSP und rsp, SPQ und spq, schließlich PQR und pqr.

---

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: *Többfélekép involuciós pontcsoportokról.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő XLIII., (1926), p. 126—137.

Das Vierseit $pqrs$ ist dem Vierseit $PQRS$ eingeschrieben; da aber die Eckpunkte $pq, pr, \ldots rs$ desselben bzw. auf den Seiten $RS, QS, \ldots PQ$ des Viereckes liegen, so sagt man nach Pasch, daß das Vierseit dem Viereck *verkehrt* eingeschrieben ist.

2. Die Polaren der Punkte einer Geraden in Bezug auf ein Dreieck sind die Tangenten eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts, dessen Berührungspunkte mit den Dreieckseiten die Eckpunkte von der Geraden harmonisch trennen. Darum ist auch der Pol der Geraden bezüglich des Dreieckes und des

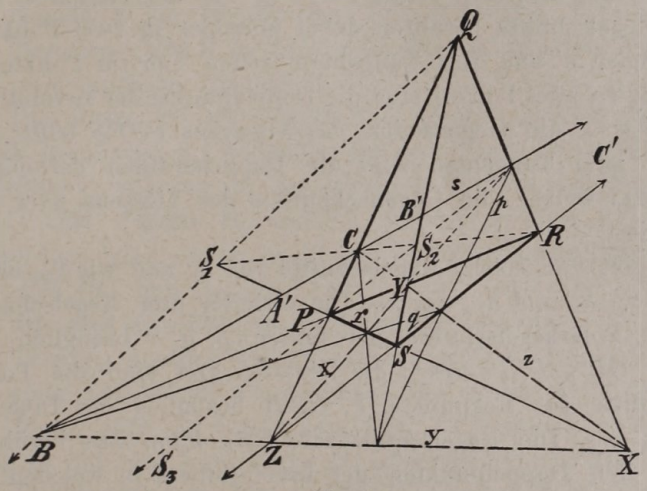


Fig. 1.

Kegelschnitts der nämliche Punkt. Diesen Kegelschnitt nennen wir den *Polarkegelschnitt der Geraden bezüglich des Dreieckes.* Dual entsprechend ist *der Polarkegelschnitt eines Punktes M bezüglich eines Dreieckes* der Ort der Pole der Strahlen des Büschels M bezüglich des Dreieckes. Dieser letztere Kegelschnitt ist dem Dreieck umgeschrieben; seine Tangenten in den Eckpunkten des Dreieckes trennen die Seitenpaare vom Punkte M harmonisch, und die Polare von M bezüglich des Dreieckes und des Kegelschnitts ist die nämliche Gerade.

3. Bestimmen wir näher den Polarkegelschnitt k_s der Seite s des dem Viereck $PQRS$ verkehrt eingeschriebenen Vierseits

$pqrs$ bezüglich des Dreieckes PQR, dann den Polarkegelschnitt k_S des Scheitels S bezüglich des Dreieckes pqr.

k_s ist dem Dreieck PQR eingeschrieben und berührt dessen Seiten QR, RP, PQ in den Eckpunkten X, Y, Z des Diagonaldreieckes; k_S ist dem Dreieck pqr umgeschrieben und wird von den Seiten x, y, z des Diagonaldreieckes $XYZ = xyz$ in den Eckpunkten qr, rp, pq berührt (Fig. 1).

Die Polare des Punktes S bezüglich beider Kegelschnitte k_s, k_S ist die Gerade s, und die Polaren der Eckpunkte sp, sq, sr des Vierseits sind die Seiten SP, SQ, SR des Viereckes. Die beiden Kegelschnitte berühren daher einander in zwei Punkten der Geraden s und ihre Tangenten treffen sich im Punkte S. Die besagten zwei Punkte sind die Doppelpunkte der Involution, in welcher s die Gegenseiten des Viereckes $PQRS$ trifft; die besagten zwei Tangenten sind die Doppelstrahlen derjenigen Involution, welche die Gegeneckpunkte des Vierseits $pqrs$ aus S projiziert.

Es gibt drei solche Kegelschnitte wie k_s und wie k_S, nämlich k_p, k_q, k_r und k_P, k_Q, k_R. Die ersteren drei Kegelschnitte sind die Polarkegelschnitte der Seiten p, q, r bezüglich der Dreiecke QRS, RSP, SPQ; die letzteren drei sind die Polarkegelschnitte der Eckpunkte P, Q, R bezüglich der Dreiecke qrs, rsp, spq. Die Kegelschnittpaare k_pk_P, k_qk_Q, k_rk_R berühren sich in den Doppelpunkten der Involutionen, in welchen die Seiten p, q, r die Gegenseiten des Viereckes $PQRS$ treffen und die Tangenten dieser Punkte sind die Doppelstrahlen der Involutionen, aus welchen die Gegeneckpunkte des Vierseits $pqrs$ aus den Punkten P, Q, R projiziert werden.

4. Das dem Viereck $PQRS$ verkehrt eingeschriebene Vierseit $pqrs$ und die Kegelschnitte k_p, k_q, k_r, k_s, welche die Seiten der Dreiecke des Viereckes in den Eckpunkten seines Diagonaldreieckes berühren, haben eine besondere Rolle bei der Bestimmung derjenigen Geraden, welche die Seiten des Viereckes in zwei-, drei- und vierfach involutorischen Sechspunkten treffen, und dual entsprechend findet man mittelst des Viereckes $PQRS$ und der Kegelschnitte k_P, k_Q, k_R, k_S diejenigen Punkte, aus welchen man die Eckpunkte des Vierseits $pqrs$ durch

zwei-, drei- und vierfach involutorische Sechsstrahlen projizieren kann.

Jede durch den Eckpunkt $ps = (XY, QR)$ des Vierseits $pqrs$ geführte Gerade g der Ebene des Viereckes $PQRS$ trifft die Gegenseiten QR, PS; RP, QS; PQ, RS in den zugeordneten Punkten AA', BB', CC' einer Involution. Da aber das Punktpaar BC ebenso wie das Punktpaar QR vom Punkte A und der Geraden PS harmonisch getrennt ist, so treffen sich die Geraden BQ, CR, PS in einem Punkte S_1; folglich trifft die Gerade s die Gegenseiten RQ, S_1S; QS_1, RS; S_1R, QS des Viereckes QRS_1S in den zugeordneten Punkten AA', BC', CB' einer anderen Involution.

Die sechs Punkte $ABCA'B'C'$ bilden also in zweifacher Weise Involutionen; in beiden ist dem Punkt A der Punkt A' zugeordnet, während in der ersten Involution den Punkten B und C die Punkte B' und C', in der zweiten C' und B' zugeordnet sind, oder nach der v. Staudt'scher Bezeichnung $AA'.BB'.CC'$ und $AA'.BC'.CB'$.

Die zwei Involutionen sind verschiedenartig.

Trennen nämlich die Punktpaare BB', CC' einander, so ist die erste Involution gleichlaufend, die zweite ungleichlaufend.

Wenn aber die Punktpaare BB', CC' einander nicht trennen, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die vier Punkte in dem Sinne $BB'CC'$ oder $BB'C'C$ liegen. Im ersten Falle sind BB', CC' und BC', CB' zugeordnete Paare von je einer ungleichlaufenden Involution, deren Doppelpunkte einander trennen. Es gibt daher kein reelles Punktpaar AA', welches diese harmonisch trennt, d. h. es können nicht, wie wir annehmen wollen, alle sechs Punkte $ABCA'B'C$ reell sein.

Im zweiten Fall sind die durch die zugeordneten Punktpaare BB', CC'; BC', CB' bestimmten Involutionen verschiedenartig und es gibt daher ein reelles Punktpaar, welches beiden angehört, womit dann die Behauptung bewiesen ist.

5. Eine jede Seite des Vierseits $pqrs$ geht durch drei Eckpunkte, z. B. die Seite s geht durch die Eckpunkte ps, qs, rs des Vierseits, vereint daher in dreifacher Weise die charakteristische Eigenschaft der mit den Eckpunkten des Vierseits in-

zidenten Geraden, daß sie nämlich die Viereckseiten in zweifach involutorischen Sechspunkten treffen.

Sind daher AA', BB', CC' die Treffpunkte der Geraden s mit den Gegenseiten QR, PS; RP, QS; PQ, RS des Viereckes und nimmt man in Betracht, daß sich die Geradentripel BQ, CR, PS; CR, AP, QS; AB, BQ, RS bzw. in den Punkten S_1, S_2, S_3 schneiden und daher die Gerade s die Seiten der Vierecke $QRSS_1$, $RPSS_2$, $PQSS_3$ in denselben sechs Punkten treffen, so bilden diese Sechspunkte die Involutionen

$$I = AA'.BB'.CC',$$

$$I^a = AA'.BC'.CB',\ I^b = AC'.BB'.CA',\ I^c = AB'.BA'.CC'.$$

In der ersten Involution trennt jedes zugeordnete Punktpaar zwei solche von den vier übrigen, die nicht zugeordnet sind, harmonisch; es sind also durch AA' die Punktepaare BC und $B'C'$, durch BB' die Punktepaare CA und $C'A'$, schließlich durch CC' die Punktepaare AB un $A'B'$ harmonisch getrennt. Daraus folgt, daß die erste Involution gleichläufig, die übrigen drei ungleichläufig sind.

Also:

Die Seiten eines Viereckes werden von vier Geraden in vierfach involutorischen Sechspunkte getroffen: diese sind die Seiten des dem Viereck verkehrt eingeschriebenen Vierseits; eine von den vier Involutionen auf jeder Geraden ist gleichläufig, die anderen drei sind ungleichläufig.

Jede mit einem Eckpunkt des Vierseits inzidente Gerade ihrer Ebene trifft die Seiten des Viereckes in Sechspunkte, die in zweifacher Weise Involutionen bilden, welche verschiedenartig sind.

Es gehen daher durch jeden Punkt der Ebene eines Viereckes sechs Gerade, welche das Viereck in zweifach involutorischen Sechspunkte treffen; diese bilden selbst einen involutorischen Sechsstrahl.

Der duale Satz für das Vierseit folgt leicht aus diesem.

6. Suchen wir jetzt die Geraden, welche die Seiten eines Viereckes in dreifach involutorischen Sechspunkten treffen. (Fig 2.)

Trifft eine Tangente t desjenigen Kegelschnitts k_s von Nr. 3, der die drei Seiten QR, RP, PQ des Viereckes $PQRS$ in den Diagonalpunkten X, Y, Z berührt, diese drei Seiten bzw. in den Punkten A, B, C: so bilden die vier Tangenten von k_s zwei BRIANCHON-Sechsseiten $PZQXAB$, $PYRXAC$. Da nun die Hauptdiagonalen des ersteren durch einen Punkt U, die des zweiten durch einen Punkt V gehen, so treffen die Gegenseiten der Vierecken $PQRS$, $ZQUS$, $YRVS$ die Tangente t in den

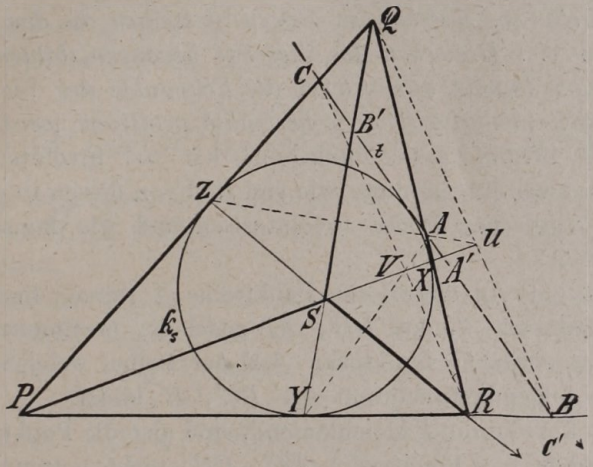


Fig. 2.

zugeordneten Punktpaaren AA', BB', CC'; AB', BC', CA'; AC', BA', CB' je einer Involution.

Die sechs Punkte $ABCA'B'C'$ bilden daher in dreifacher Weise Involutionen, in welchen den drei Punkten ABC die Punkte $A'B'C'$, $B'C'A'$, $C'A'B'$ in ziklischer Reihe zugeordnet sind. Man kann somit sagen, daß diese zwei Punkttripel eine *ziklische Involution* bilden.

Die drei Involutionen der ziklischen Involution sind gleichartig, u. zw. ungleichlaufend. Denn vereint sich die Tangente t des Kegelschnitts k_s mit einer Seite des Dreieckes PQR, z. B. mit PQ, so gelangen die Punkttripel ABC, $A'B'C'$ bzw. in QPZ, PQZ, die ungleichen Sinnes sind.

Da nun auch die Kegelschnitte k_p, k_q, k_r von Nr. 3 die nämliche Eigenschaften haben als k_s, so können wir sagen:

Die Tangenten der vier Kegelschnitte, welche die Seiten der Dreiecke eines Viereckes in den Diagonalpunkten berühren, haben die Eigenschaft, daß sie die Seiten des Viereck in dreifach involutorischen Sechspunkten treffen, welche ungleichlaufenden Involutionen angehören.

Und dual entsprechend:

Die dem Diagonaldreieck eines Vierseits eingeschriebenen vier Kegelschnitte, welche die Seiten desselben in den Eckpunkten der vier Dreiecken des Vierseits berühren, bilden den Ort derjenigen Punkte, aus welchen die Eckpunkte des Vierseits durch ziklisch-involutorische Sechsstrahle projiziert werden.

7. Jede involutorische Punktreihe hat ∞^3 involutorische Sechspunkte; wir fragen nun: wie viel sind von diesen in zwei-, drei- oder vierfacher Weise involutorisch und wie konstruirt man dieselben?

Es sei eine involutorische Punktreihe I durch die zwei Paar zugeordneten Punkte BB', CC' gegeben; bestimmen wir dasjenige zugeordnete Punktpaar AA' der Reihe, welches mit jenen noch folgende Involution $AA'.BC'.CB'$ bildet.

Ist die Involution I gleichlaufend, sind also die Punktpaare getrennt, daher die Punktpaare BC', CB' nicht getrennt, so hat die durch die zugeordneten Punkte bestimmte Involution $BC'.CB'$ reelle Doppelpunkte MN und die involutorische Reihe I hat ein zugeordnetes Punktepaar AA', welches MN harmonisch trennt, also auch ein zugeordnetes Punktpaar der Involution $BC'.CB'$ ist.

Wenn aber I ungleichlaufend ist, also die Reihe reelle Doppelpunkte hat, so sind die Punktpaare BC', CB' (bei geeigneter Bezeichnung der Punkte C, C') stets getrennt; es gibt daher in der durch die zugeordneten Punkte BC', CB' bestimmten Involution ein zugeordnetes Punktpaar AA', welches jene obigen Doppelpunkte harmonisch trennt und also der Involution I angehört.

Also:

In jeder involutorischen Punktreihe gibt es ∞^2 Sechs-

punkte, welche noch in einer anderen Weise eine Involution bilden; zwei zugeordnete Punktpaare der Reihe kann man beliebig annehmen, wodurch dann das dritte Punktpaar der Reihe bestimmt ist.

8. Bevor wir in einer involutorischen Punktreihe ein Sechspunkt konstruieren, welches vierfach involutorisch ist, wollen wir ein solches unabhängig vom Viereck, wie in Nr. 5, bestimmen und einige Bemerkungen hinzufügen.

Sind A, B, C drei Punkte einer Reihe und trennen die Punkte A', B', C' der Reihe die Punkte A, B, C des Tripels von den zwei anderen harmonisch, so bilden bekanntlich die sechs Punkte die vier Involutionen

$$I = AA'.BB'.CC'$$

$$I^a = AA'.BC'.CB',\ I^b = AC'.BB'.CA',\ I^c = AB'.BA'.CC',$$

woraus dann auch ersichtlich ist, daß das Punkttripel ABC aus dem Punkttripel $A'B'C'$ ebenso abgeleitet werden kann, wie dieses aus jenem.

Die Involution I ist gleichlaufend, die anderen drei I^a, I^b, I^c sind ungleichlaufend und die reellen Doppelpunkte A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' derselben sind zugeordnete Punkte der Involution I. Ist die Bezeichnung so gewählt, daß der Sinn der Punkttripel $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ der nämliche sei, so haben diese dieselbe gegenseitige Lage, als die zwei früheren Punkttripel ABC, $A'B'C$, d. h. das Punktpaar A_1A_1' trennt die Punktpaare B_1C_1, $B_1'C_1'$, das Punktpaar B_1B_1' trennt die Punktpaare C_1A_1, $C_1'A_1'$ und das Punktpaar C_1C_1' trennt die Punktpaare A_1B_1, $A_1'B_1'$ harmonisch. Die zwei neuen Punkttripel bilden daher außer der Involution I noch die Involutionen

$$I_1^a = A_1A_1'.B_1C_1'.C_1B_1',\ I_1^b = A_1C_1'.B_1B_1'.C_1A_1',\ I_1^c = A_1B_1'.B_1A_1'.C_1C_1',$$

deren Doppelpunkte bzw. AA', BB', CC' sind.

Deshalb gehören auch zu den Involutionen I^a, I^b, I^c, I_1^a, I_1^b, I_1^c die bzw. zugeordneten Punktpaare B_1C_1, $B_1'C_1'$; C_1A_1, $C_1'A_1'$; A_1B_1, $A_1'B_1'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; AB, $A'B'$.

Die zwei Sechspunkte $ABCA'B'C'$ und $A_1B_1C_1A_1'B_1'C_1'$, sowie ihre Involutionen $I^aI^bI^c$ und $I_1^aI_1^bI_1^c$ kann man *konjugiert* nennen.

Zwei beliebige in vierfacher Weise involutorische Sechspunkte sind projektiv, u. zw. in zwölffacher Veränderung ihrer Elemente (d. h. in zwölffacher Weise).

Besteht nämlich der erste involutorische Sechspunkt aus den zwei Tripeln ABC, $A'B'C'$, der zweite aus den Tripeln $A_iB_iC_i$, $A_i'B_i'C_i'$, so können den Punkten ABC, sowohl die Punkte $A_iB_iC_i$, als auch die Punkte $A_i'B_i'C_i'$ in jeder Kombination als

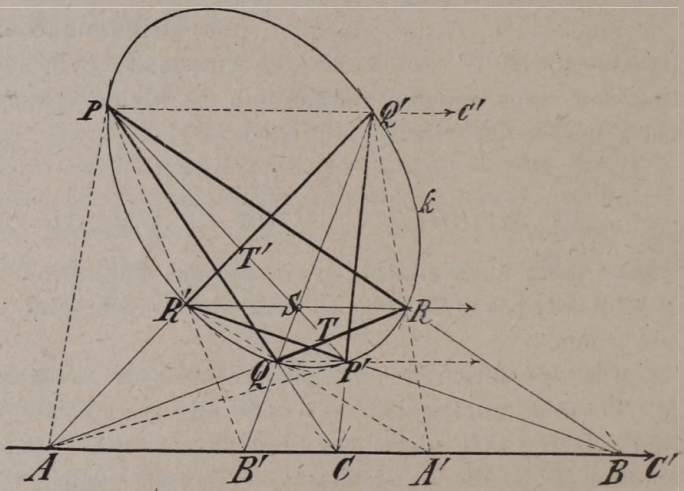


Fig. 3.

entsprechend zugeordnet werden, womit dann die übrigen Punkte ihre entsprechenden finden.

9. Jetzt soll in einer gegebenen involutorischen Punktreihe I, die z. B. die konjugierten Pole des Kegelschnitts k auf einer Geraden s bestimmen, ein vierfach involutorisches Sechspunkt konstruiert werden (Fig. 3).

Wir nehmen an, daß erstens I gleichlaufend und S der Pol der Geraden s nach k ist.

AA' sei ein zugeordnetes Punktpaar der Involution. Die aus A ausstrahlenden Tangenten des Kegelschnitts k mögen diesen in den Punkten PP' berühren. Diejenigen zwei Geraden des Büschels A, welche die Punktpaare $P'S$ und PS von dem Punkt A' harmonisch trennen, sollen den Kegelschnitt k in

den Punkten QR und $Q'R'$, die Gerade PS in den Punkten T und T' treffen. Die Punkttripel PQR, $P'Q'R$ seien gleichen Sinnes.

Wegen den harmonischen Würfen $P'SA'T$, $T'A'SP$ sind $T'P'$, PT, SA' zugeordnete Punkte einer Involution. Daher sind die Würfe $PP'SA'$, $TT'A'S$ projektiv; folglich ist das Punktpaar TT' und auch PP' vom Punktpaar SA' harmonisch getrennt. Also treffen sich die Geradenpaare QQ', RR' im Punkte S und die Geradenpaare QR', RQ' im Punkte A'. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß das Punktpaar PP' die Punktpaare QR, $Q'R'$ harmonisch trennt. Aus der Konstruktion folgt, daß auch das Punktpaar QQ' die Punktpaare RP, $R'P'$, und das Punktpaar RR' die Punktpaare PQ, $P'Q'$ harmonisch trennt.

Die sechs Punkte $PQRP'Q'R'$ bilden daher in vierfacher Weise Involutionen auf dem Kegelschnitt k, nämlich: $PP'.QQ'.RR'$, $PP'.QR'.RQ'$, $PR'.QQ'.RP'$, $PQ'.QP'.RR'$. Die Mittelpunkte dieser Involutionen sind S und die Treffpunkte A', B', C' von s mit den Geraden PP', QQ', RR'. Die Pole dieser drei Geraden nach k sind die auf s liegenden Treffpunkte A, B, C, der Geradenpaare QR, $Q'R'$; RP, $R'P'$; PQ, $P'Q'$.

Da die Projektion der involutorischen Reihe $PP'.QQ'.RR'\ldots$ aus irgendeinem Punkte des Kegelschnitts k auf die Gerade s die gegebene Involution I ist, so bilden auch die Projektionen des Sechspunktes $PQRP'Q'R'$ aus den Punkten des Kegelschnitts k auf die Gerade s die vierfach involutorische Sechspunkte der Involution I, darunter auch das Sechspunkt $ABCA'B'C'$, als die Projektion des Sechspunktes $PQRP'Q'R'$ aus jedem Punkte desselben.

Ist zweitens die auf der Geraden s durch den Kegelschnitt k gegebene Involution I^a ungleichlaufend, trifft also die Gerade s den Kegelschnitt k in reellen Punkten, und führt man bei derselben Bezeichnung dieselbe Konstruktion aus, aber bei Vertauschung der Rollen der zwei Punkte S und A': so erhält man wieder zwei Punkttripel PQR, $P'Q'R'$ gleichen Sinnes auf den Kegelschnitt k. Die Verbindungsgeraden der Punktpaare PP', QQ', RR' sind mit dem Pole S der Geraden s nach k inzident und die Projektion der sechs Punkte $PQRP'Q'R'$ aus

einem beliebigen Punkte des Kegelschnitts k auf die Gerade s sind die in vierfachen Weise involutorischen Sechspunkte der gegebenen Involution I. Es sind auch umgekehrt in diesem und im früheren Falle die Projektionen der Sechspunkte dieser Involutionen I^a und I aus den Punkten des Kegelschnitts k auf k selbst vierfach involutorische Sechspunkte der nämlichen Involution auf k.

Also:

In jeder involutorischen Punktreihe gibt es ∞^1 vierfach involutorische Sechspunkte; jedes zugeordnete Punktpaar der Reihe bestimmt zwei andere zugeordneten Punktpaare, die mit dem ersten vierfach involutorische Sechspunkte bilden.

10. Es seien auf einer Geraden die vier Punkte A, B, C, A' gegeben; man konstruiere die zwei Punkte $B'C'$ so, daß $AA'.BB'.CC'$, $AB'.BC'.CA'$, $AC'.BA'.CB'$ Involutionen seien.

Gehen die Seiten QR, RP, PQ eines Dreieckes PQR bzw. durch die Punkte A, B, C, dann gibt es einen dem Vierseit $PQRABC$ eingeschriebenen Kegelschnitt, der die Seite QR in dem Punkte $(PA', QR) = X$, die Seiten PR und PQ aber in den Punkten Y und Z berührt. Es treffen sich dann die Geraden $PA'X$, QY, RZ in einem Punkte S und die Geraden QY, RZ treffen die Gerade AB (Nr. 6) in den gewünschten Punkten B', C' (Fig. 3).

Liegen die vier Punkte A, B, C, A' nicht auf einer Geraden, sondern auf einem Kegelschnitt k, der noch durch einen fünften Punkt P gegeben ist, so lassen sich die Punkte B' C' auf diesen Kegelschnitt ebenfalls linear bestimmen.

Trennen nämlich die Punkte A_0, B_0, C_0 auf k jeden der Punkte A, B, C von den beiden anderen harmonisch, so treffen die Tangenten der letzteren die Seiten BC, CA, AB des Dreieckes ABC in den Punkten der Polare s des Punktes $S \equiv (AA_0, BB_0, CC_0)$. Die Projektionen der Punkte B, C aus dem Treffpunkte von s und der Geraden AA' auf k sind die gewünschten Punkte B', C'.

11. In jeder ungleichlaufenden Involution I gehören zu zwei zugeordneten Punktpaaren AA', BB' zwei solche in I zugeordnete Punktpaare, welche mit jenen ziklische Involutionen bilden.

Es liege die Punktinvolution I auf dem Kegelschnitt k und P sei ein veränderlicher Punkt derselben.

Die veränderliche Strahlen AP, BP treffen die Tangenten b und a der Punkte B und A in zwei projektiven Reihen, deren Erzeugnis ein den Kegelschnitt k in den Punkten A, B berührender Kegelschnitt $\varkappa$ ist.

Die aus dem Involutionsmittelpunkt $U = (AA', BB')$ der Involution I ausstrahlende Tangenten c und d des Kegelschnitts $\varkappa$ treffen jede der Tangenten a und b in solchen zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden mit den Punkten A und B sich in dem Punkte C, bzw. D des Kegelschnitts k schneiden. Diese zwei Punkte und ihre zugeordneten C' und D' in der Involution I sind die gewünschten, indem die Punktpaare AB', BC', CA'; AC', BA', CB', als auch die Punktpaare AB', BD', DA'; AD', BA', DB' zugeordnete Punkte sind je einer Involution.

Daraus folgt:

In jeder ungleichlaufenden involutorischen Punktreihe sind ∞^2 *Sechspunkte, die noch in zweifacher Weise Involutionen bilden.*

5.

ÜBER TETRAEDER, DEREN KANTEN EINE KUGEL BERÜHREN.

Von L. KLUG.

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung am 14. Februar 1927.*

In diesem Aufsatz befassen wir uns mit solchen Tetraedern, deren Kanten eine Kugel berühren. Wir nehmen an, daß von dem Tetraeder ein Kantendreieck oder Dreikant gegeben ist und suchen den Ort des vierten Eckpunkt, bzw. der vierten Seite. Zum Schlusse wird die besondere Lage des Tetraeders zu seinem Polartetraeder im Polarraum der die Kanten berüchrenden Kugel bestimmt.

1. Ein Dreieck ABC, dessen Seiten $BCA = a$, $CA = b$, $AB = c$ sind $(a > b > c)$, bestimmt drei Paar konfokale Kegelschnitte, deren Brennpunkte die Eckpunktpaare des Dreieckes sind und welche durch die freien Eckpunkte gehen. Diese sind die Ellipsen e_a, e_b, e_c und die Hyperbeln h_a, h_b, h_c, von welchen $e_a h_a$, $e_b h_b$, $e_c h_c$, bzw. die Brennpunkte BC, CA, AB haben und welche sich in den Eckpunkten A, B, C senkrecht schneiden (Fig. 1). Die Scheitel auf den Fokalachsen dieser Kegelschnitte sind die Berührungspunkte der dem Dreieck eingeschriebenen Kreise. Die Scheitel der Ellipsen sind die Berührungspunkte von Ankreisen, die Scheitel der Hyperbeln aber Berührungspunkte des Inkreises und je eines Ankreises. Die Länge der Fokalachsen

---

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: *Éleivel gömböt érintő tetraeder.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő XLIV., p. 477—494.

der Hyperbeln h_a, h_b, h_c und der Ellipsen e_a, e_b, e_c sind daher: $b-c$, $a-c$, $a-b$, bzw. $b+c$, $c+a$, $a+b$.

Die drei Hyperbeln treffen sich in zwei Punkten M, M'; und zwar liegen die Punktpaare AM, BM, CM auf je einem

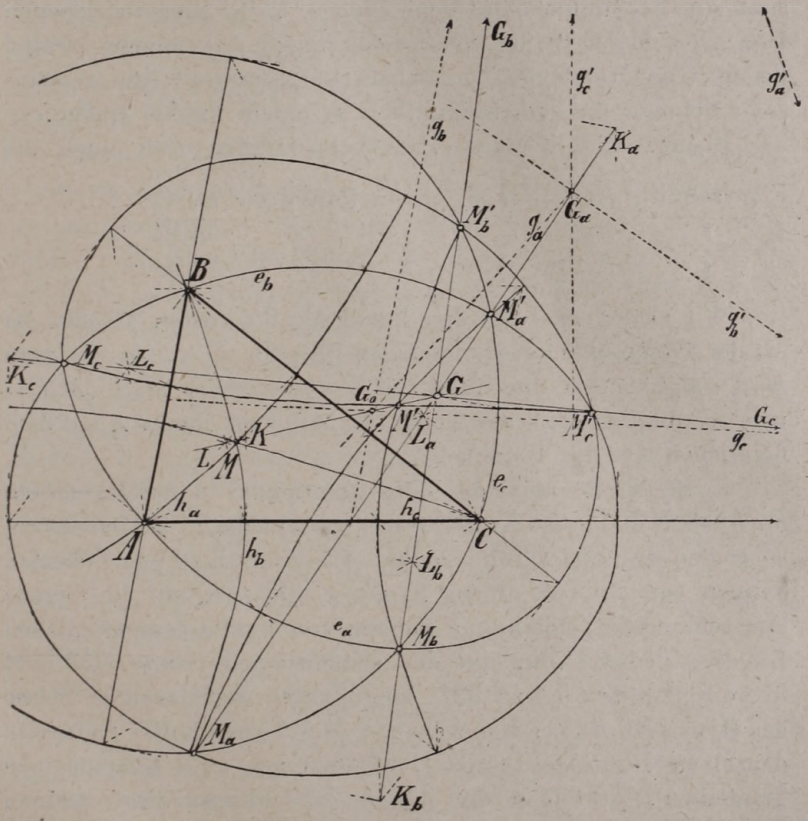


Fig. 1.

Ast der drei Hyperbeln und der Punkt M' auf den drei anderen Ästen.

Bezeichnet man nämlich den Treffpunkt der zwei durch B und C gehenden Äste der Hyperbeln h_b und h_c mit M, so ist $MC-MA=a-c$, und $MB-MA=a-b$.

Durch Subtraktion folgt hieraus: $MC-MB=b-c$; und da

auch $AC-AB=b-c$ ist, so liegen die Punkte M und A auf dem nämlichen Aste der Hyperbel h_a.

Desglichen haben die drei anderen Äste der Hyperbeln h_a, h_b, h_c einen gemeinsamen Punkt M', und die den Eckpunkten A, B, C diametral gegenüberliegende Punkte der Hyperbeln sind die Eckpunkte eines dem Dreieck ABC umgeschriebenen Dreieckes, dessen Seiten mit des der Seiten des anderen parallel liegen. (Die drei Hyperbeln haben paarweise noch drei gemeinsame Sehnen, die sich bekanntlich in einem Punkte treffen.)

Ebenso wie die drei Hyperbeln, treffen sich auch die

Kegelschnitte h_a, e_b, e_c in einem Punktpaar M_aM_a'
« h_b, e_c, e_a « « « M_bM_b'
« h_c, e_a, e_b « « « M_cM_c'.

Wir zeigen dies für den Punkt M_a des ersten Tripels. Ist M_a der Treffpunkt der Monofokalen Ellipsen e_b, e_c, so hat man $M_aA+M_aC=c+a$ und $M_aA+M_aC=b-c$, aber $M_aB-M_aC=b-c$, folglich liegt der Punkt M_a mit dem Punkt A auf dem nämlichen Ast der Hyperbel h_a.

2. Beschreibt man aus dem Brennpunkt A der Hyperbeln h_b, h_c als Mittelpunkt Kreise $\varkappa$ mit verschiedenen Halbmessern, so treffen die zwei auf die Gerade AC senkrechten gemeinsamen Sehnen von h_b und einem Kreise $\varkappa$, die zwei auf die Gerade AB senkrechte gemeinsame Sehnen von h_c und dem nämlichen Kreise $\varkappa$ in zwei Punkten der gemeinsamen Sehne MM' und in zwei Punkten der zu MM' konjugierten gemeinsamen Sehne der Hyperbeln h_b, h_c. Denn «haben drei Kegelschnitte paarweise denselben Kontingenzpunkt (Treffpunkt von zwei gemeinsamen Tangenten), so bilden die diesen zugeordneten gemeinsamen Sehnenpaare der Kegelschnittpaare die gegenüberliegenden Seiten eines Viereckes, d. h. sie treffen sich zu dreien in vier Punkten».[1]

---

[1] Diesen Satz wollen wir hier beweisen.

Der Punkt S sei der gemeinsame Kontingenzpunkt der drei Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 und s_1, s_2, s_3 seien die Polaren des Punktes S nach ihnen.

Die gemeinsamen Sehnenpaare $t_{12}t_1'$, $t_{23}t_{23}'$, $t_{13}t_{13}'$ der Kegelschnittpaare k_1k_2, k_2k_3, k_1k_3 trennen die Polarenpaare s_1s_2, s_2s_3, s_1s_3 harmonisch.

Wählen wir zwei Sehnen, die zu zwei Sehnenpaaren gehören, z. B.

Da nun der Brennpunkt A der zwei Hyperbeln und der Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$ für je zwei der Kurven h_b, h_c und $\varkappa$ Kontingenzpunkt ist, so ist die Behauptung richtig.

Ist der Halbmesser des Kreises $\varkappa$ gleich Null, so werden die zum Brennpunkte A gehörige Leitlinien der Hyperbeln h_b, h_c die Berührungssehnen mit diesem Kreise; diese Leitlinien treffen sich daher auf der gemeinsamen Sehne MM' der Hyperbeln.

Berührt der Kreis $\varkappa$ die Hyperbeln in ihren dem Brennpunkt A zunächst liegenden Scheiteln, so sind die Scheiteltangenten gemeinsame Sehnen von $\varkappa$ und den Hyperbeln, und sie treffen sich im Mittelpunkte K des Inkreises des Dreieckes ABC, welcher daher ebenfalls auf einer gemeinsamen Sehne der zwei Hyperbeln liegt.

Ist endlich der Halbmesser des Kreises $\varkappa$ gleich der Seite

---

t_{13} und t_{23}. Die Polaren des Treffpunktes $P=(t_{13}t_{23})$ nach den drei Kegelschnitten k_1, k_2, k_3 seien bzw. p_1, p_2, p_3.

Die Pole (p_1s_1), (p_2s_2), (p_3s_3) der Geraden PS nach den drei Kegelschnitten liegen auf der durch den Punkt S gehenden konjugierten Polare der Geraden PS; daher sind die Dreiseiten $p_1p_2p_3$, $s_1s_2s_3$ perspektiv.

Die Eckpunkte (p_1p_2), (p_2p_3), (p_3p_1) des ersten Dreieckes sind konjugierte Pole zu P bezüglich den Kegelschnittpaaren k_1k_2, k_2k_3, k_3k_1, und da auch die gemeinsamen Sehnen t_{13}, t_{23} durch P gehen, so liegt auch der Punkt (p_1p_3) auf der Sehne t_{13} und der Punkt (p_2p_3) auf der Sehne t_{23}. Anderseits sind die Sehnen t_{13}, t_{23} auch bzw. mit den Punkten (s_1s_3), (s_2s_3) inzident: darum ist P der Perspektivitätsmittelpunkt der persp. Dreiseiten, und es liegen daher die homologen Eckpunkte (p_1p_2), (s_1s_2) jener Dreiseiten mit P in einer Geraden.

Aber die konjugierten Pole (p_1p_2), P der Kegelschnittpaare sind mit dem Punkt (s_1s_2) in einer Geraden; diese kann aber nur eine der durch den Punkt (s_1s_2) gehende gemeinsame Sehne t_{12} oder t'_{12} sein, welche daher durch den Treffpunkte der gemeinsamen Sehnen t_{13}, t_{23} geht.

Es sind daher die zum Kontingenzpunkt S zugeordneten gemeinsamen Sehnenpaare $t_{12}t'_1$, $t_{23}t'_{23}$, $t_{13}t'_{13}$ der Paare der Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 die Gegenseiten eines Viereckes; seine Eckpunkte sind $t_{12}t_{13}t_{23}$, $t'_{12}t'_{13}t_{23}$, $t'_1t_{13}t'_{23}$, $t_{12}t'_{13}t'_{23}$ und die Seiten seines Diagonaldreieckes sind die Polaren s_1, s_2, s_3 des Kontingenzpunktes S nach den Kegelschnitten k_1, k_2, k_3.

Der *duale Satz* wird für drei Kreise gewöhnlich aus metrischen Beziehungen bewiesen und lautet: «Die sechs Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen liegen zu dreien auf ihren vier Ähnlichkeitsachsen».

BC des Dreieckes, so ist eine zur Seite AC senkrechte gemeinsame Sehne von h_b und x und eine zur Seite AB gemeinsame Sehne von h_c und x je eine Höhe des früheren Dreieckes $A'B'C'$; der Höhenpunkt G dieses Dreieckes liegt daher ebenfalls auf einer gemeinsamen Sehne der Hyperbeln h_b, h_c.

Da man nun aber auch für die zwei anderen Hyperbelpaare h_c, h_a; h_a, h_b auf derselben Weise die nämlichen zwei Punkte K und G erhält, so müssen diese auf der gemeinsame Sehne MM' der drei Hyperbeln liegen.

Die Polaren des Punktes K nach den drei Hyperbeln verbinden die Berührungspunkte der Seiten des Inkreises mit den Gegeneckpunkten des Dreieckes und treffen sich in dem zu K konjugierten Pole L der Hyperbeln; es trennt daher der Punkt L die Punkte M, M' vom Punkte K harmonisch, und diese Sehne MM' steht senkrecht auf die (harmonische) Polare l des Punktes L nach dem Dreieck ABC und nach dem Kreis k.

Teilt man die Seiten AB, BC, CA des Dreieckes ABC nach dem Verhältnisse der Gegenseiten der auf ihnen liegenden Eckpunkten innerlich und äußerlich, und fällt aus den inneren Teilpunkten Senkrechte auf diejenigen Geraden, welche den Punkt G bzw. mit den äußeren Teilpunkten verbinden, so sind die drei Senkrechten g_a, g_b, g_c die Polaren des Punktes G nach den Hyperbeln h_a, h_b, h_c und diese treffen sich ebenfalls auf der Sehne in dem zu G konjugiertem Pole G_0 der drei Hyperbeln, und die Punktpaare MM', GG_0 trennen einander harmonisch.

3. Auch die drei übrigen Kegelschnitt-Tripel $h_a e_b e_c$, $h_b e_c e_a$, $h_c e_a e_b$ bestimmen auf ihren gemeinsamen Sehnen $M_a M_a'$, $M_b M_b'$, $M_c M_c'$ je zwei Paare konjugierter Pole, welche diese harmonisch trennen. Einen Punkt des einen Paares geben die Mittelpunkte K_a, K_b, K_c der Ankreise k_a, k_b, k_c des Dreieckes ABC, welche die Dreieckseiten BC, CA, AB in ihren endlichen Teilen berühren; ihre Polaren bezüglich der drei Kegelschnitte jedes Tripels treffen sich in den Punkten L_a, L_b, L_c jener gemeinsamen Sehnen und trennen sie von den betreffenden Mittelpunkten der Ankreise harmonisch. Endlich stehen auch die Polaren l_a, l_b, l_c der Punkte L_a, L_b, L_c nach dem Dreieck ABC

und auch nach den betreffenden Ankreisen bzw. senkrecht zu den gemeinsamen Sehnen $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ der Kegelschnitt-Tripel.

Vom zweiten Paare der konjugierten Pole jener Kegelschnitt-Tripel ist der eine Punkt der Höhenpunkt G des Dreieckes $A'B'C'$; in den zu diesem konjugierten Polen G_a, G_b, G_c bezüglich jener Kegelschnitt-Tripel treffen sich je drei der Polaren g_a, g_b, g_c, g'_a, g'_b, g'_c des Punktes G nach den Kegelschnitten h_a, h_b, h_c, e_a, e_b, e_c.

Die ersten drei dieser Polaren haben wir schon bestimmt (2); die übrigen drei: also die Polaren des Punktes G nach den Ellipsen e_a, e_b, e_c, findet man, wenn man wieder die Seiten BC, CA, AB des Dreieckes nach dem Verhältnis der Gegenseiten der auf ihnen liegenden Eckpunkte innerlich und äußerlich teilt und aus den äußeren Teilpunkten Senkrechte fällt auf diejenigen Geraden, welche den Punkt G mit dem inneren Teilpunkten verbinden; diese Senkrechten sind die betreffende Polaren.

Es bilden daher die Polaren des Punktes G nach den sechs Kegelschnitten ein Viereck, dessen Eckpunkte durch die Seiten so ausgedrückt werden können: $G_0 = (g_a g_b g_c)$, $G_a = (g_a g'_b g'_c)$, $G_b = (g'_a g_b g'_c)$, $G_c = (g'_a g'_b g_c)$.

4. Die acht Punkte M, $M' \ldots M'_c$ stehen noch in einer anderen Beziehung zum Dreieck ABC.

Der Treffpunkt M der Hyperbeln h_a, h_b, h_c hat wegen den Gleichungen $MB - MA = CB - CA$, $MC - MB = AC - AB$ und $MC - MA = BC - BA$ die Lage, daß die den Dreiecken MAB, MBC, MCA eingeschriebenen Kreise, welche die Seiten des Dreieckes ABC in den Berührungspunkten des Inkreises k (also in je einem Hyperbelscheitel) berühren, sich paarweise auch auf den Geraden MA, MB, MC berühren. Dasselbe kann man auch von den Dreiecken $M'AB$, $M'BC$, $M'CA$ mit Vertauschung der Punkte M, M' sagen.

Auch der Punkt M_a, als Treffpunkt der Kegelschnitte h_a, e_b, e_c hat wegen den Gleichungen $M_aB - M_aC = AC - AB$, $M_aA + M_aC = BA + BC$ und $M_aA + M_aB = CA + CB$ die Lage, daß die den Dreiecken M_aBC, M_aCA, M_aAB eingeschriebenen

Kreise, welche die Seite BC auf dem Ankreis k_a in einen Scheitel der Hyperbel h_a, die Seiten CA und AB aber auf dem nämlichen Ankreis in je einem Scheitel der Ellipsen e_b und e_c berühren, sich paarweise auch auf den Geraden M_aA, M_bB, M_cC berühren.

Nachdem auch die übrigen Punkte $M_a' \ldots M_c'$ diese Eigenschaft haben, so ergibt sich der Satz:

Ist k der Inkreis und sind k_a, k_b, k_b die Ankreise eines Dreieckes ABC, welch letztere die Seiten BC, CA, AB in ihren endlichen Teilen berühren, und K, K_a, K_b, K_c die Mittelpunkte derselben, und treffen sich die Geraden, welche die Berührungspunkte der Dreieckseiten und jener Kreise mit den Gegeneckpunkten verbinden in den Punkten L, L_a, L_b, L_c: so treffen die Geraden KL, KL_a, KL_b, KL_c, welche auf die Polaren l, l_a, l_b, l_c der Punkte L, L_a, L_b, L_c bezüglich des Dreieckes senkrecht stehen, in demjenigen Punkte G, der zum Höhenpunkt des Dreieckes bezüglich des Mittelpunktes des diesem umgeschriebenen Kreises symmetrisch liegt.

Teilt man die Seiten BC, CA, AB des Dreieckes ABC nach dem Verhältnisse der Gegenseiten ihrer Eckpunkte äußerlich und innerlich und fällt auf die sechs Geraden, welche diese Punkte mit G verbinden aus den inneren-, bzw. äußeren Teilpunkten die sechs Senkrechte: so treffen sich die aus den inneren Teilpunkten gefällten Senkrechten g_a, g_b, g_c in einem Punkte G_0, während die aus den äußeren Teilpunkten gefällten Senkrechten g_a', g_b', g_c' ein Dreieck bilden, dessen Eckpunkte $G_a = (g_b'g_c')$, $G_b = (g_c'g_a')$, $G_c = (g_a'g_b')$ bzw. auf den Senkrechten g_a, g_b, g_c liegen. Diese sechs Senkrechten sind daher die Seiten eines Viereckes, dessen Eckpunkte G_0, G_a, G_b, G_c bzw. auf den vier aus G ausstrahlenden Geraden KL, K_aL_a, K_bL_b, K_cL_c liegen.

Die viermal zwei Punktpaare GG_0, KL; GG_a, K_aL_a; GG_b, K_bL_b; GG_c, K_cL_c bestimmen aber vier Punktpaare MM', M_aM_a', M_bM_b', M_cM_c', welche jedes der zwei ersteren Paare harmonisch trennen.

Das Dreieck ABC bestimmt noch drei Paar konfokale Kegelschnitte h_ae_a, h_be_b, h_ce_c, deren Brennpunkte bzw. die Eckpunktpaare BC, CA, AB sind und welche sich bzw. in den

Eckpunkten A, B, C des Dreieckes ABC senkrecht treffen. Diese sechs Kegelschnitte, von welchen h_a, h_b, h_c Hyperbeln, die anderen drei aber Ellipsen sind, haben die Lage, daß je ein Ast der Hyperbeln durch jene Eckpunkte und durch den Punkt M geht, die drei anderen Äste durch M', und die Kegelschnitt-Tripel $h_a e_b e_c$, $h_b e_c e_a$, $h_c e_a e_b$ durch die Punktpaare $M_a M_a'$, $M_b M_b'$, $M_c M_c'$ gehen, so daß diese Punktpaare daher mit dem Punkt M' auf je einen Hyperbelast liegen.

Die drei Eckpunkte des Dreieckes ABC und jeder der acht Punkte $M, \ldots M_c'$ bilden die Eckpunkte von acht Vierecken und man kann in jeden der vier Dreiecke derselben solche Kreise einschreiben, deren jeder die drei anderen berührt; von diesen Kreisen ist daher immer einer von den Kreisen k, k_a, k_b, k_c.

Diese acht Vierecke können als (in einer Ebene) verkümmerte Tetraeder betrachtet werden; die in ihren Kantendreiecken eingeschriebenen und sich paarweise berührende vier Kreise sind die Tetraederkanten berührenden Kreise der in einer Ebene verflachten Kugel.

Anmerkung. Die gemeinsamen Punktpaare $MM', \ldots$ der Kegelschnitt-Tripel $h_a' h_b h_c, \ldots$ kann man auch ohne diese Kegelschnitte oder ihre konjugierten Polenpaare erhalten. Man sucht nämlich direkt die Kreistripelpaare, deren Kreise einen dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreis z. B. den Inkreis k in seinen Berührungspunkten A_1, B_1, C_1 mit den Dreieckseiten BC, CA, AB berühren und auch sich paarweise berühren (Fig. 2).

Die homologen Seiten der bezüglich des Punktes $L=(AA_1, BB_1, CC_1)$ persp. Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ treffen sich in den Ähnlichkeitspunkten $A_3=(BC, B_1C_1)$, $B_3=CA, C_1A_1)$, $C_3=(AB, A_1B_1)$ der Kreispaare jener Kreistripel. Die Polaren AA_1, BB_1, CC_1 dieser Ähnlichkeitspunkte nach dem Kreis k treffen bzw. die Seiten des Dreieckes $A_1B_1C_1$ in den konjugierten Polen $A_2=(AA_1, B_1C_1)$, $B_2=(BB_1, C_1A_1)$, $C_2=(CC_1, A_1B_1)$ zu jenen Ähnlichkeitspunkten.

Die aus den Eckpunkten A, B, C des Dreieckes als Mittelpunkte beschriebenen und zu k senkrechten Kreise α, β, γ, schneiden bzw. die Geraden KA_2, KB_2, KC_2 in Punktpaaren, welche schon die Berührungspunkte der Kreispaare der gesuch-

ten zwei Kreistripeln sind. Darum gehen die Durchmesser dieser Treffpunkte (α, KA_2), (β, KB_2), (γ, KC_2) der Kreise α, β, γ zu dreien durch die Punkte M. M'. Also:

Ist K der Mittelpunkt irgendeines dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises k, der die Seiten BC, CA, AB desselben in den Punkten A_1, B_1, C_1 berührt und sind α, β, γ die aus den Eckpunkten A, B, C als Mittelpunkten durch die Be-

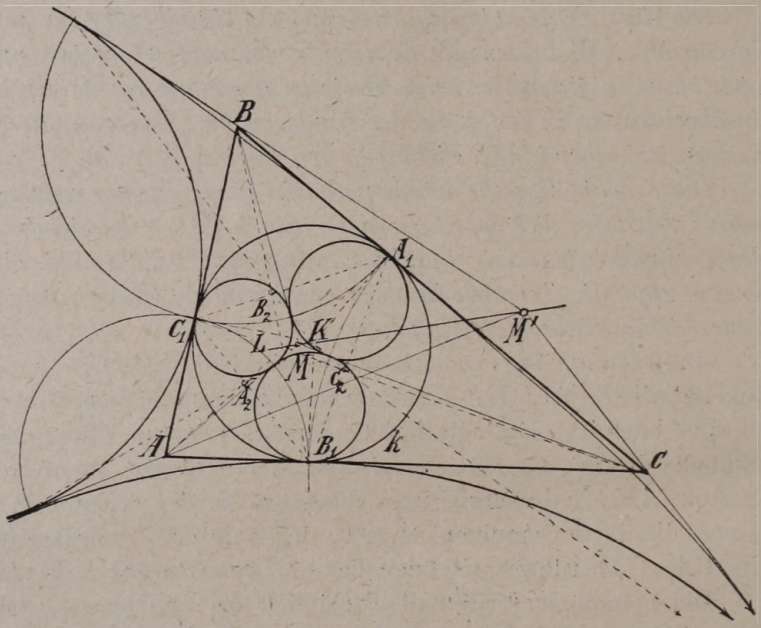


Fig. 2.

rührungspunktpaare B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 beschriebenen Kreise und sind $A_2=(AA_1, B_1C_1)$, $B_2=(BB_1, C_1A_1)$, $C_2=(CC_1, A_1B_1)$ die Treffpunkte der hier angegebenen Geradenpaare, so treffen die Geraden KA_2, KB_2, KC_2 bzw. die Kreise α, β, γ in sechs Punkten, deren bezügliche Durchmesser sich zu dreien in den Punkten M, M' schneiden.

Die den Dreiecken MBC, MCA, MAB, wie auch den Dreiecken $M'BC$, $M'CA$, $M'AB$ eingeschriebenen Kreise, welche die Seiten des Dreieckes ABC in den Punkten A_1, B_1, C_1 be-

rühren, berühren einander paarweise noch in den obigen sechs Treffpunkten. Die Vierecke MABC, M'ABC sind also schon in einer Ebene verflachte Tetraeder, deren Kanten eine ebenfalls verflachte Kugel berühren.

5. Betrachten wir die früheren drei Hyperbeln und drei Ellipsen $(h_a, h_b, h_c; e_a, e_b, e_c)$ als Meridiane von drei zweischaligen Drehhyperboloiden und drei Drehellipsoiden $(H_a, H_b, H_c; E_a, E_b, E_c)$, deren Drehachsen die Seiten BC, CA, AB des Dreieckes ABC sind. Diese treffen sich zu dreien, u. z. $H_aH_bH_c$, $H_aE_bE_c$, $H_bE_cE_a$, $H_cE_aE_b$ in vier Kegelschnitten m, m_a, m_b, m_c, von welchen die erste eine Hyperbel, die übrigen drei Ellipsen sind, deren Ebenen auf die Ebene ABC senkrecht stehen und deren Hauptachsen MM', M_aM_a', M_bM_b', M_cM_c' sind.

Um nämlich die Schnittlinie der monofokalen Drehhyperboloiden H_b, H_c zu finden, schneidet man sie nach dem Vorgang von Monge mit Kugeln, deren Mittelpunkt der Treffpunkt A ihrer Drehachsen ist; jeder dieser Kugeln trifft die zwei Hyperboloide in zwei Kreispaaren und das eine dieser Kreispaare trifft das andere Paar in Punktpaaren der gemeinsamen Linie der zwei Hyperboloide. Nachdem die senkrechte Projektion der Treffpunkte nach früherem auf der gemeinsamen Sehne MM' der Meridiane h_b, h_c jener Hyperboloide und noch auf einer gemeinsamen Sehne derselben liegt, und da auch der Meridian h_a des Hyperboloides H_a durch die Punkte M, M' geht: so treffen sich die Hyperboloide H_a, H , H_c in derjenigen Hyperbel, in welchen die durch die Gerade MM' gelegte und auf die Ebene ABC senkrechte Ebene eine derselben trifft.

Ebenso beweist man dasselbe für die anderen drei Flächentripel.

Die vier Kegelschnitt m, m_a, m_b, m_c, also auch die sechs Flächen $H_a \ldots E_c$ gehen durch diejenigen zwei Punkte SS', in welchen sich die aus den Eckpunkten des Dreieckes ABC als Mittelpunkte mit den Halbmessern der Gegenseiten des Dreieckes als Halbmesser beschriebenen Kugeln treffen. Die Seiten der Tetraeder $SABC$, $S'ABC$ sind daher kongruente Dreiecke und wir wollen dieselben als *gleichseitige* Tetraeder bezeichnen, während hingegen die Tetraeder, deren Kantendreiecke gleichseitig

sind als *regelmäßige* oder *reguläre* Tetraeder bezeichnet werden können.

6. Liegt ein Punkt D auf einem der Kegelschnitte m, m_a, m_b, m_c, z. B. auf der Hyperbel m, so folgt aus den durch m gehenden drei Drehhyperboloiden H_a, H_b, H_c:

$$\pm (DC - DB) = AC - AB$$
$$\pm (DB - DA) = CB - CA$$
$$\pm (DC - DA) = BC - BA,$$

wo beim links stehendem Teile der Gleichungen das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Punkt D auf derjenigen Schale der Hyperboloide liegt, welche durch die Eckpunkte des Dreieckes ABC gehen, oder auf der anderen.

In den Dreiecken BCD, BAD, CAD kann man daher solche Kreise einschreiben, welche die Seite BC, CA, AB des Dreieckes in ihren Berührungspunkten mit dem Kreis k berühren. Da diese Kreise auch sich selbst paarweise berühren, so liegen sie mit k auf einer Kugel, welche also die Kanten des Tetraeders $ABCD$ berührt.

Aus den drei Gleichungen folgt:

$$DA \pm BC = DB \pm AC = DC \pm AB,$$

woraus man schließen kann, daß die Summen oder Differenzen der Gegenkanten eines solchen Tetraeders gleich sind; dabei muß man in Betracht ziehen, daß die in einer Ecke (D) zusammenstoßenden Kanten größer sind als die Gegenkanten.

Sind die Punkte D, D' die unendlichfernen Punkte der Hyperbel m, so übergehen die zwei Tetraeder $ABCD$, $ABCD'$ in zwei bezüglich der Grundfläche ABC symmetrische dreiseitige Prismen, deren Seitenkanten mit den Asymtoten von m parallel sind.

Ist anderseits D der Punkt der Ellipse m_a, so hat man wegen den durch sie gehenden Drehflächen E_b, E_c, H_a die Gleichungen:

$$DC + DA = BC + BA$$
$$DA + DB = CA + CB$$
$$DB - DC = AC - AB,$$

woraus sich $AD-BC=AB-DC=AC-BD$ ergibt; also ist die Differenz der Kanten des Dreieckes BCD und seiner Gegenkanten eine konstante Strecke.

Nach all dem haben wir als Fortsetzung des Satzes unter Punkt 4:

Die aus den Eckpunkten des Dreieckes ABC als Mittelpunkte mit den Gegenseiten als Halbmesser beschriebenen Kugeln treffen sich in den bezüglich des Dreieckes symmetrischen Punkten S, S' so, daß die symmetrischen Tetraeder ABCS, ABCS' gleichseitig sind. Die mit Punktpaar SS' inzidente Hyperbel m und die Ellipsen m_a, m_b, m_c, deren Hauptachsen die Strecken MM', M_aM_a', M_bM_b', M_cM_c' sind, bilden den geometrischen Ort der vierten Eckpunkte derjenigen Tetraeder, deren drei Eckpunkte die des Dreieckes ABC sind und deren Kanten eine Kugel berühren.

Jede dieser Kugeln berührt sämtliche Kanten des Tetraeders in ihren endlichen Teilen, wenn der vierte Eckpunkt D auf demjenigen Ast der Hyperbel m angenommen wird, dessen Scheitel innerhalb des Umfanges des Dreieckes ABC ist; hingegen berühren diese Kugeln in ihren endlichen Teilen nur die Kanten des Kantendreieckes ABC, DBC, DCA, oder DAB, die übrigen Kanten aber in ihren unendlichlangen Teilen, wenn man den vierten Eckpunkt D auf dem anderen Ast der Hyperbel m, oder auf einer der Ellipsen m_a, m_b, m_c annimmt. Im ersten Falle sind die Summen der Gegenkanten der Tetraeder gleich; im zweiten Falle aber ist die Differenz der Kanten jener vier Dreiecke und ihrer Gegenkanten bei jedem Tetraeder gleich.

Die Kanten eines jeden dieser Tetraeder werden nur von einer Kugel berührt, ausgenommen diejenigen der gleichseitigen Tetraeder ABCS, ABCS', welche von vier Kugeln berührt werden; diese vier Kugeln berühren nur die Kanten je eines Kantendreieckes in ihren endlichen Teilen.

Wir wollen hier noch folgendes bemerken: In jedes dieser

Tetraeder $ABCD$ kann man (wie in ein allgemeines Tetraeder) acht Kugeln einschreiben, welche ihre Flächen berühren und eine Kugel, die ihre Kanten berührt, also insgesammt neun Kugeln. Beim gleichseitigen Tetraeder hat man fünf Kugeln, die ihre Seiten und vier Kugeln, die ihre Kanten berühren, also ist auch hier die Summe neun. Die Anzahl der Kugeln die ein regelmäßiges Tetraeder berühren, ist zehn: fünf berühren ihre Flächen und fünf ihre Kanten.

Wir wollen dies an der Hand der früheren Betrachtungen erklären.

Ist das Dreieck ABC regelmäßig, so fällt der Punkt G, sowie auch das Punktpaar MM' (3) in den Höhenpunkt des Dreieckes und die Hyperbeln h_a, h_b, h_c sind die Höhen desselben; die Drehhyperboloide H_a, H_b, H_c übergehen in die Ebenen, welche die Ebene des Dreieckes in ihren Höhen senkrecht treffen, während die Ellipsen e_a, e_b, e_c und die Ellipsoide E_a, E_b, E_c, sowie auch die Ellipsen m_a, m_b, m_c verbleiben, die Hyperbel m verkümmert in die Gerade, die im Höhenpunkt des Dreieckes ABC auf ihre Ebene senkrecht steht.

Der Scheitel S des regelmäßigen Tetraeders $ABCS$ liegt daher auf beide Äste der in dieser Senkrechten verkümmerten Hyperbel m und auf den Ellipsen m_a, m_b, m_c; daher ist die Anzahl der die Kanten berührenden Kugeln laut den obigen Ableitungen gleich *fünf*.

Außer dem regelmäßigen Tetraeder hat kein orthozentrisches Tetraeder die Eigenschaft, daß seine Kanten eine Kugel berühren.

Die Fußpunkte der Höhen des orthozentrischen Tetraeder sind die Höhenpunkte der betreffenden Kantendreiecke. Der Höhenfußpunkt der hier betrachteten Tetraeder ($ABCD$) liegt aber immer auf eine der vier Geraden (MM',...), welche den bekannten Punkt G mit den Mittelpunkten der vier dem Kantendreieck eingeschriebenen Kreisen verbinden. Der Höhenpunkt des Kantendreieckes liegt aber nur dann auf einer dieser vier Geraden, wenn er mit G koinzidiert, also das Kantendreieck regelmäßig ist.

7. Im folgenden wollen wir das Tetraeder, dessen Kanten

eine Kugel berühren, aus einem Dreikant $D(abc)$ desselben konstruieren.

Nehmen wir auf den Kanten a, b, c dieses Dreikants die Punkte A_0, B_0, C_0 im gleichen Abstande von seinem Scheitel an und bezeichnen wir mit k_1, k_2, k_3 die drei Kreise, welche jene Kantenpaare in den Punkten B_0, C_0; C_0, A_0; A_0, B_0 berühren; desgleichen sei k_0 der dem Dreieck $A_0B_0C_0$ umgeschriebene Kreis. Die Tangenten dieses Kreises k_0 in den Eckpunkten des Dreieckes treffen die Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden l und die drei Treffpunkte sind die Scheitel von drei durch die Kreispaare k_1k_2, k_2k_3, k_3k_1 gehenden Kegel. Durch die Gerade l gehen daher zwei Berührungsebenen zu diesen drei Kegeln, welche die Kanten a, b, c des Dreikants in den Punktpaaren AA', BB', CC' und die Flächen in den Tangentenpaaren BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; AB, $A'B'$ der Kreise k_1, k_2, k_3 treffen, so daß die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ die Gegenseite des Eckpunktes D der gesuchten Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D$ bilden.

Ändert man die Punkte A_0, B_0, C_0 auf den Kanten des Dreikants $D(abc)$ und seines Scheiteldreikants, so bleiben die Ebenen ABC und auch $A'B'C'$ stets parallel, nimmt man sie aber auf den drei Nebendreikanten von $D(abc)$ an, so erhält man die Stellungen von drei neuen Ebenenpaaren wie ABC, $A'B'C'$. Also:

Drei Ebenen α, β, γ, die sich in einem endlichfernen Punkte D treffen, bestimmen vier Scheiteldreikante $D(\alpha\beta\gamma)$. Schreibt man in einem derselben eine Kugel ein, welche seine drei Kanten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ in den Punkten A_0, B_0, C_0 berührt und schneidet man die Berührungsebenen dieser Punkte mit den Geraden B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0, so bilden die aus diesen Schnittpunkten ausstrahlenden und mit den Ebenen α, β, γ inzidenten Tangenten der Kugel zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$, welche mit D zusammen die Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D$ bestimmen, deren Kanten die Kugel berühren.

Verändert man die Kugel, welche die Kanten des Dreikants $D(\alpha\beta\gamma)$ berührt und benützt man auch die Kugeln, welche die Kanten der drei Nebendreikante berühren: so er-

hält man vier Paar parallele Ebenenbüschel, deren Ebenenpaare wie $ABC=\delta$, $A'B'C'=\delta'$ *das Dreikant zu Tetraedern ergänzen, deren Kanten eine Kugel berühren.*

Es ist auch leicht ersichtlich, daß die Ebenenpaare ABC, $A'B'C'$ vom Scheitel durch die Ebene $A_0B_0C_0$ harmonisch getrennt sind.

8. Wir nehmen ein Dreieck ABC und eine Kugel ϱ an, welche die Seiten des Dreieckes berührt und wollen die Punkte D, D' so bestimmen, daß alle Kanten der Tetraeder $ABCD$, $ABCD'$ die Kugel ϱ berühren.

Die aus den Eckpunkten des Dreieckes ausstrahlenden Tangenten der Kugel bilden drei sich in den Seiten des Dreieckes paarweise berührende Drehkegel, welche sich daher noch paarweise in drei Kegelschnitten treffen. Die Ebenen dieser Kegelschnitte gehen durch den Pol D_1 der Ebene ABC nach der Kugel und durch diejenigen Geraden, welche die Eckpunkte des Dreieckes mit den Berührungspunkten auf den Gegenseiten verbinden, und treffen sich daher in einer Geraden l. Diese Gerade trifft die drei Kegelschnitte und auch jeden der Kegel in den gesuchten Punkten D, D', welche die Dreiecksebene von ihrem Pole nach der Kugel harmonisch trennen. Also:

Berührt eine Kugel die Seiten eines Dreieckes ABC *und ist* L *der Treffpunkt der drei Geraden, welche die Eckpunkte des Dreieckes mit den Berührungspunkten auf den Gegenseiten verbinden,* D_1 *der Pol der Dreiecksebene nach der Kugel, so treffen sich die in den Ebenen* ALD_1, BLD_1, CLD_1 *liegenden und aus den Eckpunkten des Dreieckes ausstrahlenden Tangenten der Kugel zu dreien in solchen von der Dreiecksebene und ihrem Pol* D_1 *harmonisch getrennten Punkten* D, D', *daß alle Kanten der zwei Tetraeder* $ABCD$, $ABCD'$ *die Kugel berühren.*

Da die Punkte D, D' die Endpunkte sind der auf einer durch den Punkt L gehenden Sehne eines der Kegelschnitte m, m_a, m_b, m_c (3. Punkt), so haben wir die dualen Sätze:

Berühren die Kanten eines Tetraeders eine Kugel, so bilden die drei

Ebenen, welche drei Seiten des Tetraeders von der vierten Seite und die durch die Kanten dieser vierten Seite gehenden Berührungsebenen der Kugel harmonisch trennen, zusammen mit dieser vierten Seite die Seiten

Punkte, welche drei Eckpunkte des Tetraeders vom vierten Eckpunkt und die Berührungspunkte auf den drei in diesem vierten Eckpunkt zusammenstoßenden Kanten harmonisch trennen, zusammen mit diesem vierten Eckpunkt die Eckpunkte

eines Tetraeder, dessen Kanten von der nämlichen Kugel berührt werden.

9. Es soll jetzt die Lage eines Tetraeders $ABCD$, dessen Kanten eine Kugel ϱ berühren, zu seinem Polartetraeder bezüglich dieser Kugel bestimmt werden.

Sind A_1, B_1, C_1, D_1 die Pole der Gegenseiten der Eckpunkten A, B, C, D nach der Kugel ϱ, so sind die Tetraeder $ABCB$, $A_1B_1C_1D_1$ Polargebilde von einander in Bezug auf die Kugel ϱ.

Die Polaren der Kanten AB, CD,... des ersten Tetraeders nach der Kugel ϱ sind diejenigen Kanten C_1D_1, A_1B_1,... des zweiten Tetraeders, welche auf jene in den Berührungspunkten senkrecht stehen und mit jenen in den Berührungsebenen der Kugel liegen: also berühren die Kanten des zweiten Tetraeders ebenfalls die Kugel ϱ.

Da beliebige zwei Tetraeder, die bezüglich einer Kugel Polargebilde von einander sind, so sind auch die Tetraeder $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ perspektiv: also treffen sich vier Verbindungsgeraden der homologen Eckpunkte in einem Punkte P, ferner liegen die vier Schnittgeraden der homologen Seiten in der Polarebene π des Punktes P nach der Kugel.

Die Ebenenpaare, welche den Punkt P mit den Gegenkanten AB, CD; AC, BD; AD, BC des ersten Tetraeders, also auch die Gegenkanten des zweiten Tetraeders verbinden, treffen sich in drei Geraden PQ, PR, PS, welche durch die Berührungspunkte jener Gegenkanten gehen; und da die Berührungspunkte den Punkt P und die Ebene π harmonisch trennen: so ist π die (harmonische) Polarebene des Punktes

P nach beiden Tetraedern. Die Verbindungsebene von je zwei der drei Geraden PQ, PR, PS trennt die Ebene π harmonisch, von den auf der dritten Geraden liegenden zwei Berührungspunkten und ihren zwei Berührungsebenen; sie ist daher die Polarebene desjenigen Punktes, in welchen die dritte Gerade die Ebene π trifft. Sind daher Q, R, S die Treffpunkte jener drei Geraden mit der Ebene π, so ist $PQRS$ ein Polartetraeder der Kugel ϱ.

Die drei Tetraeder $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $PQRS$ sind desmisch, also beliebige zwei davon sind zentrisch-involutorisch bezüglich den vier Eckpunkten und vier Gegenseiten des dritten Tetraeders, u. zw. ist das Tetraeder $ABCD$ (zent.-inv.) perspektiv mit $A_1B_1C_1D_1$, $B_1A_1D_1C_1$. $C_1D_1A_1B_1$, $D_1C_1B_1A_1$ bezüglich der Eckpunkte P, Q, R, S und Gegenseiten des Tetraeders $PQRS$. Die drei desmischen Tetraeder haben noch die besondere Lage, daß die sich treffende Kanten von zweien aufeinander senkrecht stehen ($AB \perp C_1D_1, \ldots$) und das dritte Tetraeder als Polartetraeder einer Kugel orthozentrisch ist.

Also:

Berühren die Kanten eines Tetraeders eine Kugel und verbindet man die Punkte, welche die Berührungspunkte auf den Kanten von den Eckpunktpaaren harmonisch trennen mit den Berührungspunkten auf den Gegenkanten, so bilden diese sechs Verbindungsgeraden, welche die Kugel ebenfalls berühren, die Kanten eines zweiten Tetraeders. Diese zwei Tetraeder und ein drittes, dessen drei Kanten die Berührungspunkte der Gegenkanten der zwei anderen Tetraeder verbinden und dessen drei andere Kanten die Schnittgeraden der Berührungsebenen dieser Punkte sind, und welches daher ein Polartetraeder der Kugel ist: bilden drei desmische Tetraeder, mit der Eigentümlichkeit, daß jede Kante des ersten Tetraeders auf je eine Kante des zweiten senkrecht steht und das dritte Tetraeder orthozentrisch ist.

Dieser Satz, sowie der Doppelsatz des 8. Punktes ist auch dann richtig, da beide auf projektive Eigenschaften beruhen, wenn man die Kugel durch eine allgemeine Fläche zweiter

Ordnung ersetzt, nur sind in diesem Falle die Tetraeder allgemein desmisch.[1]

10. Von den ∞^{12} Tetraedern des Raumes sind ∞^{9} gleichseitig und es gibt darunter ∞^{10}, deren Kanten eine Kugel berühren; von letzteren sind ∞^{4} verschieden (d. h. keine zwei derselben sind kongruent), aber ∞^{3} sind gleichseitig.

Dieselbe Kugel können die Kanten von ∞^{6} Tetraedern berühren; von diesen sind ∞^{3} von einander verschieden und davon sind ∞^{2} verschiedene gleichseitige Tetraeder.

Endlich gibt es ∞^{1} Tetraeder, deren Kanten eine Kugel berühren und die ein gemeinsames Kantendreieck oder ein gemeinsames Dreikant haben.

---

[1] Th. Reye: Über Tetraeder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren. Arch. d. Math. u. Phys. III. R.; 16. B. p. 163.

6.

ÜBER DIE SANDE IN DER UMGEBUNG VON KONIA.

Von ALADÁR VENDL, Mitglied der Akademie.

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 5. Dec. 1927.*

Gelegentlich seiner Reise in Asien 1910 sammelte Herr R. MILLEKER, Prof. der Geographie in Debrezin, auch einige Sandproben. Er ersuchte mich dieselben zu untersuchen.

Die Proben wurden wesentlich mit denselben Methoden untersucht, die ich bei meinen bisherigen sediment-petrographischen Beobachtungen benützte.[1] Die nach den spezifischen Gewichten gesonderten Partien untersuchte ich teils in Dünnschliffen, teils eingebettet in Flüssigkeiten von bekannter Lichtbrechung. Die Brechungsexponenten wurden durch die üblichen Flüssigkeiten annähernd bestimmt. Ich ließ aus den größeren Gesteinskörnern (erbsen-, sogar haselnußgroßen) auch Dünnschliffe anfertigen, insoferne sie nicht zu stark verwittert waren, wie dies oft der Fall war. Einige der Gesteinskörner sind sogar so stark verwittert, daß ihre Bestimmung unausführlich war. Die Form und die Oberfläche der Körner beobachtete ich mit

---

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: *Konia környékének homokjairól.* Mathematikai és természettudományi Értesítő, XLV., (1928).

[1] VENDL A.: Über den Sand der Csepel-Insel. Földtani Közlöny XLIII., 1913, p. 375—389.

VENDL A.: Über die Sande der Gegenden des Tarim-Beckens. Földtani Közlöny XLI., 1911, p. 361—372.

VENDL A.: Mineralogische Untersuchung der von DR. AUREL STEIN in Zentralasien gesammelten Sand- und Bodenproben. Mitteil. aus d. Jahrbuch der kgl. ungarischen geologischen Reichsanstalt. XXI, 1912, p. 1—37.

Fig. 1.

einem binokularen Mikroskop nach Zeiss. In manchem Falle mußte ich auch mikrochemische Reaktionen anwenden, wozu ich die seit lange bekannten Reaktionen benützte.

I. Tseshmeli zebir, trockener Graben.

Die Sandprobe enthält auch verhältnismäßig viel gröberes Material, unter welchen sich auch einige erbsengroße, stark abgeschliffene Stücke befinden. Darunter lassen sich die folgenden Gesteinsfragmente bestimmen: ziemlich viele kleine, teils löcherige, teils vollständig dichte, gelblich-rosafarbene Kalksteinstücke,

mergeliger Kalkstein, durchzogen von rötlich-braunen Limonitadern, graulich-gelbe, kalkige Mergelstückchen und schwarzgraue, Kalksteinkörner.

Schon mit unbewaffneten Augen lassen sich auf einigen winzigkleinen, blaß gelblichgrünen, rundlichen Körnchen hie und da schwarze Erzkörnchen bemerken; die grünliche Hauptmasse der Körner ist ziemlich weich und läßt sich mit dem Messer kratzen. Diese Körner bestehen auf Grund der Mikroskopischen Untersuchungen aus *Serpentin*. Es geht aus den Beobachtungen an den Dünnschliffen hervor, daß diese Serpentinkörner aus recht kurzen Serpentinfasern bestehen, mit unregelmäßiger Verteilung. Die Fasern sind hie und da etwas länger, sie erreichen manchmal eine Länge bis 0·55 mm, und in diesem Falle sind sie parallel gelagert. Die Längsrichtung der Fasern fällt mit γ zusammen. Die Lichtbrechung der Serpentinfasern ist etwas größer, als die des Kanadabalsams. Die Doppelbrechung ist sehr schwach. Die in der Hauptmasse des Serpentins hie und da erscheinenden winzigen, teils isometrischen, teils aus unregelmäßigen Körnern bestehenden Erzanhäufungen und isoliert vorkommenden Körner sind schwarz und überwiegend opak. Diese Körner bestehen also wahrscheinlich aus *Magnetit*. Selten sind auch solche Erzkörnchen zu finden, die in den sehr dünnen Schnitten braun durchsichtig und isotrop sind, diese bestehen wahrscheinlich aus *Chromit*. Als Umrandung der Erzkörnchen lassen sich hie und da durch Verwitterung gebildete gelblichbraune Flecken von Eisenhydroxid beobachten. Manche Körner sind so stark zersetzt, daß die Serpentinsubstanz in der aus Eisenhydroxid bestehenden Hauptmasse nur kaum zu erkennen ist.

An einigen Serpentinkörnern sind mit unbewaffneten Augen bronzfarbene, glänzende Minerale zu beobachten. Aus der mikroskopischen Untersuchung geht hervor, daß auch die Hauptmasse dieser Körnchen aus lichtbräunlich-gelb durchsichtigem Serpentin besteht und sie ist faserig ausgebildet. Die Fasern sind teils parallel, teils unregelmäßig verteilt, seltener kreuzen sie sich in kleinen Flecken gitterförmig. In der Serpentinmasse kommen hie und da, — in den Dünnschliffen farb-

los erscheinende, — *Bronzit*-Trümmer in kleinen Körnchen vor, deren Doppelbrechung stärker und Lichtbrechung größer ist, als die des Serpentins. An diesen Piroxendurchschnitten kann man die Spaltung nach (110) gut beobachten; die Auslöschung in der Prismenzone ist gerade. Wo größere Piroxenkörner erhalten geblieben sind, dort fällt die γ Richtung des Piroxens und des Serpentins zusammen. Verhältnismäßig viel *Pikotit* ist in diesem Gestein zu finden von dunkelbrauner Farbe mit schwach grünlichem Stich. Die Pikotitkörnchen sind vollständig isotrop und von unregelmäßigen Konturen.

Aus diesen Beobachtungen läßt sich der Schluß ziehen, daß der *im Sande gefundene Serpentin aus irgendeinem Piroxen (Bronzit)-führenden, eruptiven Gestein entstanden ist.*

Einige stark dekomponierte, erbsengroße, rundliche Körner charakterisieren noch diesen Sand. Man bemerkt schon mit unbewaffnetem Auge, daß die Struktur der Körnchen ziemlich feinkörnig ist und daß es aus weißem Feldspat und aus irgendeinem schwarzen Mineral von prismatischem Habitus besteht.

Die mikroskopische Untersuchung ergab, daß die wesentlichen Bestandteile dieses Gesteins sind: stark verwitterter *Plagioklas* und *Amfibol*. Die *Plagioklase* sind nach (010) tafelig, Albitzwillinge, hipidiomorph; der trübe innere Teil ist ein wenig bräunlich-grau durchsichtig; sie sind sehr stark verwittert, größtenteils kaolinisch und teils serizitisch und bestehen aus Anhäufungen von winzigen Schüppchen; bloß hie und da sind sie etwas frischer. Ihre Zusammensetzung ist zirka $Ab_{60}An_{40}$, auf Grund der an den frischeren Partien in der symmetrischen Zone gemessenen maximalen Auslöschung. Die Plagioklase füllen den Raum zwischen den Amfibolen aus. An den *Amfibolen* ist die Form $\{110\}$, $\{010\}$ gut vernehmbar, die terminalen Flächen sind aber nicht gut ausgebildet: der Kristall hat an den zwei Enden der Hauptachse eine unregelmäßige Form Die Amfibole sind ebenfalls ziemlich stark zerfallen, was hauptsächlich im Verblassen zum Vorschein tritt; ihre optisehe Eigenschaften sind jedoch gut zu beobachten. Der Pleochroismus ist ziemlich stark: α = blaßgräulich-gelb, β = hellbräunlich-grün, γ = dunkelbräunlich-grün, $\gamma : c$ = circa 18°. In manchen Amfibolen kommen

Magnetit-Einschlüsse vor. Mancher Amfibol ist mehr oder weniger kloritisch verwittert.

Außer den wesentlichen Gemengteilen nehmen noch winzige, mehr oder weniger isometrische *Magnetit*-Körnchen Teil an der Zusammensetzung des Gesteins. Der Magnetit ist manchmal dünnfaserig ausgebildet, die Faden kreuzen sich gitterförmig. Es kommt noch außerdem in diesem Gestein *Klinozoizit* in winzigen farblosen Körnchen vor — die wahrscheinlich auf Kosten der Plagioklase gebildet worden sind — und auch wenige winzige, im Dünnschliff farblos erscheinende *Titanitkörnchen*, mit sehr starker Doppelbrechung und starker Lichtbrechung, sind zu finden.

Auf Grund der mineralischen Zusammensetzung und Struktur ist das Gestein ein stark verwitterter, feinkörniger *Diorit*.

Unter den größeren Körnern sind noch einige farblos-weiße, rundliche Quarzkörner, wenig rosafarbener und bräunlich-rosafarbener *Quarz* und einige *Jaspis*ähnliche eckige Körnchen zu erkennen. In der gelblich-braunen, hie und da schwärzlich-braunen Hauptmasse der letzteren kann man auffallend grell rote Flecken und Streifen beobachten.

Von den ganz winzigen Sandkörnern gelang es mir folgende Mineralien zu bestimmen:[1]

Die *Quarzkörner* sind teils eckig, teils abgerundet, gewöhnlich farblos, seltener dunkelgrau, dem lydischen Steine ähnlich. Bloß einige Quarzkörner sind rosafarben.

Die winzigen *Kalkkörnchen* sind gräulich-weiß, trüb durchsichtig und ihre Auslöschung ist gewöhnlich fleckig. Sie werden in Salzsäure bloß teilweise gelöst, da ganz kleine Tonkörnchen bei der Lösung zurückbleiben, die in der Flüssigkeit lange schweben. Diese Kalzitkörnchen sind also stark mergelig. Nur selten sind ganz durchsichtige, farblose Kalzitkörnchen zu finden.

Die Körnchen anderer Mineralien sind auch oft mehr oder

[1] Die Reihenfolge der Mineralien wählte ich derartig, daß die in größter Menge vorhandenen Minerale zuerst kommen, hierauf folgen die übrigen, soweit sich beurteilen ließ, in abnehmender Menge.

weniger, teilweise oder ganz mit einer Kruste von Kalziumkarbonat überzogen.

Plagioklas befindet sich ziemlich viel in diesem Sande; die farblosen Körnchen sind meistens trüb durchsichtig; sie sind Albitzwillinge, nach (010) tafelig, mit zirka Labrador-Zusammensetzung auf Grund der gemessenen Auslöschungen und der Lichtbrechung.

Die winzigen Serpentinkörnchen sind dieselben, wie die oben erwähnten größeren.

Es ist charakteristisch für den Sand, daß verhältnismäßig wenig Mineralien darin zu finden sind mit höherem spezifischen Gewicht als 3.

Dieser Sand enthält ziemlich viel *Diopsid-Augit;* an den Körnchen sind die Prismenzone bildenden Flächen gut zu beobachten, manchmal sogar auch die terminalen Flächen. Dieser Augit ist grasgrün gefärbt, in dünnen Schnitten farblos, nicht pleochroitisch; die Auslöschung an der Prismenfläche beträgt circa 26°, $\gamma = c =$ cca 40°; das Mineral enthält außerdem viel Magnetiteinschlüsse.

Mancher Augitkorn scheint makroskopisch ganz schwarz, opak zu sein; und u. d. M. sind diese Körnchen ganz bleichgrünlich durchsichtig, $\gamma = c =$ cca 43—44°. Einige der Augitkörner sind bräunlich-grün durchsichtig. Manche dagegen sind ganz ziegelrot, bestehen aus Eisenoxid-Pseudomorfose und es ist bloß an der äußeren Form erkennbar, daß diese Körnchen ursprünglich Augite gewesen sind.

Magnetitkörnchen kommen auch häufig vor; sie sind meistens isometrisch, ziemlich glatt abgewetzt, manchmal fast ganz abgerundet. Selten findet man Körner auch von einer Größe von 1 mm; im allgemeinen sind sie aber viel kleiner.

In ganz winzigen Körnchen kommt der *Zirkon* ziemlich häufig vor. An den Körnchen ist die Prismenzone gut zu beobachten, die terminalen Partien sind aber sehr stark abgerundet. Zweierlei Varietäten sind zu finden: farblose in bedeutend größerer — und rosafarbene in geringerer Menge.

Der größte Teil der spärlich anwesenden *Amfibolkörnchen* ist lichtgrünlich, durchsichtig, mit ziemlich starkem Pleochroismus:

α=lichtgrünlich-gelb, β=sehr lichtbräunlich-grün, γ=dunkelbräunlich-grün, $\gamma : c$=cca 16°—18°. Mancher Amfibol gehört zu den *braunen Amfibolen;* ihr Pleochroismus: α = gelb, β'=bräunlich-gelb, γ=dunkel (grünlich) braun. Magnetit kommt als Einschluß im Amfibol vor. In sehr wenigen, etwas bläulichgrüner, in dünnen Plättchen kommt auch ein vollkommen farblosen, durchsichtiger Amfibol vor, dessen Auslöschung an der Prismenfläche 12° ist. Am Spaltblättchen einiger kleinen Körnchen, die wahrscheinlich ebenfalls zur Amfibolgruppe gehören, wurde 7—8° Auslöschung gemessen.

Einige honiggelbe, in dünnen Schnitten vollständig farblose Körnchen sind unbedingt *Titanite*, was durch die sehr starke Doppelbrechung und die sehr große Lichtbrechung, weiter durch die — trotz der ziemlich starken Abrundung — an die Titanitkristalle erinnernde Form bestätigt wird. An diesen Körnchen ist — nach der Aufstellung von Descloiseaux — die Form $\{111\}$ die vorherrschende, außerdem sind manchmal auch: $\{100\}$, $\{001\}$ und seltener $\{110\}$ zu erkennen. Liegt das Mineral an der Fläche von $\{111\}$, so beträgt die Auslöschung zur Längsrichtung gemessen cca 26°.

Bekanntlich sind die Titanitkristalle von diesem Habitus für die granitodioritische Gesteine und für die Gneiße charakteristisch.

Granat kommt in diesem Sande in geringer Menge vor; die fein abgerundeten oder zerbrochenen Körnchen sind bräunlich-rot und vollkommen isotrop.

Es gelang nur noch einige farblos- bis lichtgrünliche *Olivinkörnchen*, einige *Epidotkörnchen* und zwei *Biotittäfelchen* zu bestimmen. Die Epidotkörner löschen zu den Spaltungslinien gemessen gerade aus. Ihr Pleochroismus ist ziemlich gut bemerkbar: α'= fast farblos, mit etwas gelblichem Stich, β=lichtgelb, γ=bleichgrünlich-gelb.

An den Biotittafeln kann man sehr starken Pleochroismus beobachten: α=lichtgelb, γ=sehr dunkelbraun; der Achsenwinkel beträgt cca 0°.

M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

II. Konia, aus dem Wasserriss.

Dieser Schutt besteht aus Körnern, die eine Größe von 0·75 cm nicht übersteigen, der überwiegende Teil wird aber aus sehr kleinen Körnchen gebildet.

In den größeren Körnern kommen einige gräulich-schwarze, verwitterte, mehr oder weniger rundliche Körner vor; diese bestehen aus *Basalt* oder eventuell aus Piroxen-Andesit.

Das Gestein hat porphirische Struktur; die maximale Länge der porphirischen Ausscheidungen beträgt 0·7 mm, die durchschnittliche Größe ist aber bedeutend kleiner: bloß 0·2—0·3 mm in der Länge. Die porphirischen Ausscheidungen sind: Plagioklas, Augit, etwas Olivin; der Plagioklas kommt am meisten, der Olivin am wenigsten vor.

Die *Plagioklas*-Kristalle sind idiomorph, nach (010) mehr oder minder tafelig ausgebildet; sie sind Albitzwillinge; die Durchschnitte sind meistens leistenförmig. Sie sind wasserklar, ganz frisch. Aus der maximalen Auslöschung in der symmetrischen Zone, aus der Auslöschung des Schnittes $\perp a$ und aus den konjugiert-symmetrischen Auslöschungen an den Albit + Karlsbader Zwillingen gemessen — geht eine durchschnittliche Zusammensetzung von cca $Ab_{40}An_{60}$ hervor.

Der *Augit* ist u. d. M. farblos, in den dickeren Schnitten mit etwas gelblichem Stich. Die Prismenzone ist mit gut ausgebildeten Flächen umgrenzt: $\{100\}$, $\{010\}$; $\{110\}$ ist viel kleiner. $\gamma : c = \text{cca } 40° — 42°$. Magnetit und kleinere Flecken der Grundmasse kommen als Einschlüsse im Augit vor.

Der spärliche *Olivin* ist in dünnen Schnitten ganz farblos, an den Rändern jedoch oft rot gefärbt durch den secundär gebildeten Eisenoxid. Seltener ist der Olivin kalzitisch zersetzt. Als Einschlüsse sind darin oft *Magnetit* und seltener die scharfkantigen Kriställchen des braunen Pikotit zu finden. In einigen Körnern scheint der Olivin ganz zu fehlen.

Die Grundmasse besteht aus winzigen Plagioklasleistchen und isometrischen kleinen Magnetitkörnchen, ferner aus sehr wenig winzigen Augitkörnchen. Obgleich die Grundmasse im Dünnschliffe nicht genügend frisch war, scheint doch auch etwas

Glas mit Magnetit-Interpositionen an der Bildung der Grundmaße teilzunehmen. In der Größe der Feldspate inder Grundmasse und der porphirisch ausgebildeten Feldspate kann man allmählichen Übergang beobachten. Der *Magnetit*kommt vereinzelt auch in ziemlich grossen Körnern vor. Die Grundmasse ist dunkelbraun, an manchen Stellen aber rot gefärbt infolge des durch Oxydation gebildeten Eisenoxyd.

Die Körner scheinen nicht aus einem und demselben Gestein zu stammen; man kann an Olivinarme und an Olivinreiche und Körner und auch solche ohne Olivin finden. Und auch die Ausbildung der Grundmasse ist nicht gleich; manchmal ist die Grundmasse ziemlich grob holokristallin.

Sehr viele Körnchen sind stark oxydiert, rot gefärbt und in diesen ist auch der Olivin gewöhnlich rot gefärbt.

Manche winzige Basaltkörner sind löcherig-schlackig und rot oder rötlich-braun und die Wandungen der Löcher sind oft mit Kalzitkruste überzogen.

Die Oberfläche der Körnchen dieses Sandes ist im allgemeinen sehr oft mit Kalzium-Karbonat mehr oder weniger überzogen.

Die *Quarzkörnchen* sind meistens farblos oder rosafarben, manchmal auch etwas dunkler rot gefärbt. Auch einige grünlich-graue derbe *Quarzitkörner* sind erkennbar und auch etwas *Hornstein* kommt in grau-gelben, kleinen, eckigen Stückchen vor.

Man findet auch ziemlich viele, winzige, stark abgewetzte *Kalkstein*-Körner; diese lösen sich aber nicht ganz in Salzsäure, sondern es bleibt etwas Ton zurück.

Behandelt man diese Sandprobe — so wie sie ist, ohne Auswahl — mit einer Säure, so tritt sehr starke CO_2=Entwickelung ein. Nicht als ob sehr viel Kalkstein oder Kalzit unter den Körnchen vorhanden wäre, sondern hauptsächlich deshalb, weil eine große Anzahl der Körner mit einer sekundär gebildeten Kruste überzogen ist. $CaCO_3$ klebt die kleineren Körnchen manchmal sogar miteinander zusammen.

Auch die sehr spärliche Anwesenheit von winzigen, farblosen, abgerundeten Kalzitkörnchen ist feststellbar.

Plagioklas ist verhältnismäßig sehr viel und in ziemlich frischen Körnern zu finden. Die Körnchen sind gewöhnlich nach (010), selten nach (001) tafelig; eine Kristallform kann man übrigens nicht erkennen, da die Körnchen meistens aus Spaltblättchen, seltener aus zerbrochenen Stückchen bestehen. Sie sind meistens Albitzwillinge, die nach dem Periklin-Gesetz gebildeten Zwillinge sind selten zu finden. Ihre Zusammensetzung schwankt cca um Labradorit-Bitownit herum, auf Grund der Lichtbrechung und der Auslöschung.

In den Körnern von kleinerem spezifischem Gewicht kommen auch einige kleine Reste von Molluskenschalen vor.

Es ist charakteristisch für diesen Sand, daß er viel mehr, wenigstens zwanzigmal mehr Mineralkörner von größeren spezifischem Gewicht enthält, als der vorige.

Unter den Körnern von einer Dichte über 3, ist vielleicht die Menge von einem lichtgrünen *Augit* am größten. An den Augitkörnchen ist die Prismenzone meistens gut erhalten geblieben: {110}, {010}, {100}; an manchen Körnchen sind auch die Spuren terminaler Flächen zu beobachten. Der Augit ist u. d. M. farblos, in dickeren Plättchen mit etwas gelblichem Stich, ohne Pleochroismus, $\gamma : c = \text{cca } 40° — 44°$. Als Einschluß ist oft Magnetit anwesend.

Obgleich an einigen rötlich-braunen Körnchen die Augitform gut erkennbar ist, bestehen diese Körnchen doch nicht aus Augitsubstanz, sondern aus rötlich-braunem Eisenoxyd, welches als Pseudomorphose nach dem Augit erscheint.

Hipersthen kommt auch ziemlich oft in länglichen, prismatischen Körnern vor, an welchen die Formen {100}, {010} und {110} gewöhnlich gut sichtbar sind. Der Pleochroismus ist sehr stark: α = lichtrötlich-braun, β = lichtgelblich-braun, γ = dunkelgrün. Als Einschluß kommt im Hipersthen meistens ziemlich viel Magnetit vor.

Die Hauptmasse der Hipersthenkörner wurde manchmal zu bräunlich-rotem Limonit umgewandelt, bloß hie und da, cca in der Mitte der Körner blieb die ursprüngliche Hipersthensubstanz in einzelnen Flecken zurück, an welchen die optischen Eigenschaften noch gut zu bemerken sind. An solchen Körnern be-

merkt man zwar noch den Pleochroismus an der zwischen den Limonitpartien zurückgebliebenen Hipersthenpartie, die Doppelbrechung ist jedoch viel schwächer als beim ursprünglichen Hipersthen. Die Struktur dieser Partien ist in gewissem Grade schon faserig, die Längsrichtung der Fasern ist parallel mit der Hauptachse des Hipersthens. Die faserige Masse ist aber noch keine typische Serpentinsubstanz.

Die Ausscheidung der Eisenoxyde beginnt längs den Spaltungen und sonstigen Rissen.

Amfibol kommt im Sande verhältnismäßig wenig vor und zwar in zwei Varietäten: 1. *Brauner-Amfibol* mit folgendem Pleochroismus: $a' =$ lichtbräunlich-gelb, $\gamma =$ sehr dunkelbraun, $\gamma : c =$ cca 6—8° und 2. *Grüner-Amfibol*, $a =$ hellgrünlich-gelb, $\beta =$ bräunlich-grün, $\gamma =$ grünlich-braun, $\gamma : c =$ cca 12—14°.

Magnetit kommt ziemlich viel, meistens in beinahe isometrischen, abgerundeten Körnern vor. An manchen Körnern ist jedoch die Form $\{111\}$ noch ziemlich gut erkennbar. Sehr selten kann man auch noch die nach dem Spinell-Gesetz gebildeten Zwillinge beobachten. Die Körner sind frisch, keine Spur von verwitterter Kruste ist sichtbar; ihre Größe steigt bis zu 0·35 mm langem Durchmesser. An den Flächen des Oktaeders kann man manchmal eine Streifung parallel mit den Oktaederkanten beobachten. Eine solche Streifung wird bei der Beschreibung der nächstfolgenden Sandprobe näher behandelt werden.

Der *Zirkon* kommt ziemlich häufig teils in farblosen, teils in rosafarbenen winzigen Kriställchen vor. Die Prismenzone ist an den Kriställchen immer gut ausgebildet, die Flächen an den zwei Enden der Hauptachse sind dagegen meistens stark abgerundet. Prismatisch ausgebildete Zirkone sind auch in Körnern zu finden, an welchen die terminalen Flächen der prismatischen Kristalle vollständig abgebrochen sind.

Die wenigen *Granatkörnchen* gehören zu mindestens zwei Granatsorten, indem die Körnchen in bleichrosafarbenen und in bräunlich-roten Kristallfragmenten, mit frischen Bruchflächen vorkommen. Beide Granatsorten sind vollkommen isotrop, frei von optischen Anomalien. Bräunlich-roten Granat kann man in viel kleinerer Menge finden, als bleichrosafarbenen.

Olivin findet man ziemlich häufig in diesem Sande. Seine Körnchen sind sowohl in den Dünnschliffen, als auch in den kleineren Körnchen farblos. Die Kristallformen: {100}, {110}, {101} und die untergeordnete Form {010} sind manchmal auch zu beobachten. Hie und da — hauptsächlich den Rissen entlang — ist der Olivin, infolge der Ausscheidung von Eisenoxyd, rot gefärbt; manchmal ist sogar die ganze Masse der Körnchen rot gefärbt. Als Einschlüsse kommen winzige, krappbraun durchsichtige Pikotitkörnchen vor. An den Rändern der Olivinkörnchen sind manchmal noch die zur Grundmasse der ursprünglichen Gesteins gehörenden Plagioklasleistchen hingeklebt.

Apatit kommt spärlich — teils in winzigen, rundlichen Körnchen, teils in ganz kleinen Prismen — vor. Die Stelle der terminalen Flächen an den Prismen wurde von der — infolge der Querrissen entstandene — Trennungsfläche von ungleicher Oberfläche besetzt. Alle Apatite sind ganz farblos, durchsichtig.

Endlich gelang es mir noch einige kleine *Limonitputzchen*, zwei winzige honiggelbe *Titanitkörnchen* und einige *Biotitblättchen* zu bestimmen. Der Pleochroismus des Biotits ist sehr stark: a = lichtgelb, γ = dunkel rötlichbraun; der optische Achsenwinkel ist cca 0°.

Es sind auch einige Körnchen zu finden, die aus der Anhäufung von länglichen, prismatisch ausgebildeten und bloß sekundär gebildeten Limonitkörnchen bestehen. Unter den Limonitkörnchen sind oft auch einige Magnetitkörner zu finden, die wahrscheinlich Einschlüsse im ursprünglichen Mineral waren. Obgleich das ursprüngliche Mineral dieser Pseudomorphosen nicht mehr zu erkennen ist, scheint es doch wahrscheinlich zu sein, daß die Zusammensetzung dieser Körner ursprünglich irgendeinem Gliede der Piroxen-, oder der Amfibolgruppe entsprechend war.

Einige längliche Körnchen von prismatischem Habitus — jedoch stark cylinderförmig abgerundet — bestehen aus gelblichen Fasern. Die Fasern sind gebogen, die Längsrichtung jedoch ist im großen und ganzen parallel mit der Längsrichtung des Korns. An manchen Flecken des Korns ist die faserige Partie braungefärbt und durch starken Pleochroismus charakte-

risiert, γ = braun, a' = lichtgelb, γ fällt mit der Längsrichtung des Korns zusammen. Die Auslöschung der Körner ist fleckig, die Doppelbrechung ist schwach. Es ist höchstwahrscheinlich, daß die Körnchen ebenfalls — infolge Zersetzung — aus sekundärgebildeten Masse bestehen und daß sie eventuell einer faserigen Anhäufung irgendeiner Serpentinvarietät entsprechen. Das ursprüngliche Mineral und der Umwandlungsvorgang lassen sich nicht bestimmen.

III. Konia, aus dem Meran-Flusse, ½ Stundenweit von der Stadt.

Unter den größeren — erbsengroßen — Körnern kommen viele gräulichbraune, dichte, abgerundete Stücke von *Kalkstein* und sehr viele dichte, gelblich-weiße *mesozoische Kalksteinstückchen* vor. Häufig findet man auch bleiche, bläulich-graue, dichte Kalksteinstücke; und in kleiner Menge bräunlich-*rote dichte Kalksteinvarietäten.*

Einige 1—5 mm große, runde, sehr zersetzte Feldspate und zersetzte Grundmasse enthaltende *Andesitkörner* sind auch zu erkennen. Diese sind teils *Biotit-Amfibolandesite,* teils *Amfibolandesite.*

Die *Biotit-Amfibolandesite* enthalten außer dem Amfibole auch noch sehr viel Biotit, als porfirische Ausscheidungen. Die Biotitblättchen sind idiomorf, mit den folgenden erkennbaren Formen: {001}, {110}, {010}; der Pleochroismus ist sehr stark: a = lichtgelb, γ = dunkelbraun; der Achsenwinkel ist klein, cca 0°. Der andere, farbige Bestandteil ist der braune Amfibol, mit starkem Pleochroismus: a' = bräunlich-gelb, γ = dunkelbraun; die Auslöschung an dem Spaltblättchen beträgt nur einige Grade. Die klinozoisitisch und serizitisch stark verwitterten, porfirisch ausgebildeten Plagioklase sind gewöhnlich Albitzwillinge, seltener Albit+Periklin, oder Albit+Karlsbader-Zwillinge. Auf Grund der Lichtbrechung und der an den Albit+Karlsbader-Zwillingen gemessenen, konjugiert symmetrischen Auslöschungen, gehören sie der Labrador-Reihe an. Die verwitterte Grundmasse besteht aus winzigen Plagioklasleistchen, Amfibol-

mikrolite und aus etwas Magnetit. Infolge der starken Verwitterung ist die nähere Charakterisierung der Grundmasse unmöglich.

Die *Amfibolandesit*-Körnchen kann man zwischen den Fingern auch leicht zerbröckeln, da diese ebenfalls stark verwittert sind. Im Gegenteil zum vorigen Typus, enthalten diese Körnchen keinen Biotit, was der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Typen zu sein scheint. Der Amfibol ist frisch, mit starken Pleochroismus: α' = lichtbräunlich-gelb, γ = dunkelbraun mit etwas grünlichem Stich (an einem Spaltblättchen beobachtet). Auslöschung am Spaltblättchen beträgt cca 5—7°.

Leider fand ich keine zur genaueren Untersuchung des Gesteins genügend frische Körnchen.

Unter den größeren Körnern befanden sich noch viele *farblose Quarzkörnchen,* einige bräunlich-graue, mit roten Streifen geäderten *Quarzkieselsteine* und auch einige, mit Kalziumkarbonat locker verkittete, *feinkörnige Sandsteine.*

Ein bedeutender Teil der kleinen Sandkörnchen besteht aus *Quarzkörnern* von verschiedener Farbe, unter welchen die farblosen in größerer Menge zu finden sind. Es ist interessant, daß der Quarz auch in dünnen Häutchen, mit roher, unebener und gebogener Oberfläche vorkommt. Diese dünnen Häutchen dürften ursprünglich wahrscheinlich Ausfüllungen von sehr schmalen Spalten in verschiedenen Gesteinen gewesen sein.

Viele weißgelbe, kleine *Kalksteinkörnchen* und einige farblose *Kalzitkörner* vertreten die Karbonate. Es ist recht charakteristisch, daß der größte Teil der Sandkörnchen mit einer Kruste aus Kalziumkarbonat überzogen ist, welche mehr oder weniger, entweder das ganze Korn einhüllt, oder bloß in einzelnen Flecken an den Körnchen erscheint.

Verhältnismäßig viel Plagioklas kommt in dieser Sandprobe vor. Auf Grund der Lichtbrechung gehören diese zur Labrador-Bitownit-Reihe an.

Der große *Biotitgehalt* ist charakteristisch für diesen Sand. Die Biotitblättchen sind fast immer idiomorph und die Formen {001}, {110}, {010} sind meistens gut sichtbar; der Pleochroismus ist sehr stark: α = licht strohgelb, γ = sehr dunkelbraun,

$\beta = \gamma$; der Achsenwinkel ist cca 0°. Das Durchmesser der Biotitblättchen beträgt manchmal 2—3 mm und ihre Dicke steigt manchmal bis 1 mm. Manche Biotitblättchen sind ausgebleicht, also baueritisiert und gelb gefärbt.

Magnetit findet man auch verhältnismäßig viel in dieser Sandprobe. Die Partien, deren spezifisches Gewicht größer als drei ist, sind hauptsächlich Magnetite. Der Oktaeder ist an den meisten Körnern gut erkennbar, bloß die Spitzen wurden abgerundet. Die Oberfläche der Körner ist frisch, ohne Rost. Auf den Flächen des Oktaeders sieht man sehr oft — hauptsächlich unter dem binokularen Mikroskope — Streifungen, parallel zu den Kanten. Die Streifen steigen auf der Oktaederfläche treppenförmig, so daß die Mitte der Fläche am höchsten liegt; als wären auf den Oktaederflächen aus dünnen Plättchen stehende gleichseitige Dreiecke übereinander gelegt worden, derart, daß ein jedes höher stehende Dreieck kürzere Seiten hat, als das darunter liegende.

Diese treppenförmige Ausbildung entspricht der wiederholt vorkommenden, oszillierenden Kombination des Oktaeders und Rombdodekaeders. Ähnlich gestreifte Kristalle werden von Flink aus Nordmarken[1] erwähnt, an welchen die am höchsten liegende Fläche die trigonale Ecke des Rombdodekaeders erreichte, der ganze Kristall also den Habitus des Rombdodekaeders zeigte.

An den Magnetiten von Konia dagegen erreicht die treppenförmige Steigung nicht die Höhe der trigonalen Ecke des Rombdodekaeders, infolgedessen sind diese Kristalle vom oktaedrischen Habitus ausgebildet.

Brauner Amfibol kommt ziemlich häufig vor, mit sehr starkem Pleochroismus: α = lichtgelblich-braun, mit etwas grünem Stich, β = gelblich-braun, γ = dunkel kaffeebraun, mit etwas grünlichem Stich. Auslöschung am Spaltblättchen 5—7°; $\gamma : c$ = cca 10°.

Grünen Amfibol findet man ebenfalls ziemlich häufig mit folgendem Pleochroismus: α = grünlich-gelb, β = lichtbräunlich-

[1] Flinck G.: Mineralogiska notiser I. Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handl. Band 12, Afd. II, Nr. 2, p. 15 und Fig. 5. Stockholm, 1886.

grün, γ = dunkelgrün; Auslöschung am Spaltblättchen cca 13—16°.

Zirkon kommt verhältnismäßig viel in winzigen, farblosen und rosafarbenen, länglichen, dünnen Kriställchen vor. Am terminalen Ende der rosafarbenen Zirkone treten manchmal auch zwei Piramide übereinander auf. Folgende Kombination ist nämlich manchmal gut erkennbar: {110}, {100}, {111}, {331}.

Apatit erscheint ziemlich häufig in winzigen, sechseckigen Prismen. Die Prismenzone der Kriställchen ist scharf; die terminalen Flächen sind entweder stark abgewetzt, oder fehlen ganz. Im letzteren Falle werden die zwei Prismenenden von einer — infolge der Querabsonderung — unebenen Oberfläche begrenzt. Die Querabsonderung ist fast auf jedem Kristall gut sichtbar.

Der *Granat* kommt in rötlich-braunen Deltoidikositetraedern und Bruchstückchen ziemlich häufig vor. Selten kann man auch die Kombination von Deltoidikositetraeder und Rombdodekaeder beobachten; das Deltoidikositetraeder scheint immer die vorherrschende Form zu sein. Die Körnchen sind vollständig isotrop und enthalten oft Magnetiteinschlüsse.

Grüner *Augit* ist auch genug zu finden. Die Körner sind lang und prismatisch. $\gamma = c$ = cca 45°.

Die wenigen *Hipersthenkörnchen* sind von prismatischem Habitus, doch stark abgerundet, mit einem charakteristischen Pleochroismus: a' = gelb, γ = grasgrün. Die Körner enthalten gewöhnlich Magnetiteinschlüsse.

Ich konnte noch einige honiggelbe *Titanitkörnchen* und einige farblos-bleichgrünliche oder rötliche *Olivinkörner* bestimmen.

Ferner fand ich zwei winzige *Limonitpseudomorphosen nach Pirit*, in der pentagondodekaederischen Form, sowie auch ziemlich viel formlose Limonitkörnchen.

Endlich muß ich erwähnen, daß mir von einer jeden der drei Sandproben bloß eine Handvoll für die Untersuchung zur Verfügung stand.

*

Aus der mineralogisch-petrographischen Zusammensetzung der untersuchten Proben lassen sich die folgenden allgemeinen Schlüsse ziehen:

1. Alle drei Proben enthalten Mineralien, die in den Alkali-Kalkgesteinen vorkommen. Die für die Natron- oder Kaliprovinz charakteristischen Mineralien sind in diesen Proben nicht vorhanden.

2. Keine der Proben enthält solche Mineralien, die ausschließlich für die kristallinischen Schiefer charakteristisch sind (z. B. Disthen, Staurolith, etc.). Nur der Serpentin dürfte aus dem Gebiet der kristallinischen Schiefer stammen.

7.

ÜBER DIE AMPHIBOLITE DER SURIÁN-GEBIRGS-GRUPPE.

Von ALADÁR VENDL.

(Mit 1 Tafel.)

Vorgelegt der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. Jänner 1915.*

Die Gebirgsgruppe des Surián (Komitat Hunyad, Zone 23, Kolonne XXIX SW. der Generalstabskarte (1 : 25000) besteht aus kristallinischen Schiefern, und zwar aus den der unteren Gruppe, die von MRAZEC als die *erste Gruppe* der kristallinischen Schiefer, von SCHAFARZIK aber einfach als *Glimmerschiefer-Gruppe* bezeichnet wird. Von den Gesteinen dieser Gruppe ist es der *Glimmerschiefer* selbst, der hier dominierend auftritt.

Der Glimmerschiefer ist ein durchaus umkristallisiertes Gestein, das infolge von Injektionen mit orthogenetischen Biotitgneis in Verbindung steht. Seine Entwicklung ist ziemlich abwechselnd. Stellenweise ist derselbe stark feldspatführend und als Paragneis zu bezeichnen, wie z. B. am D. Negru und Titianul. Weiter entfernt vom orthogenetischen Gneis tritt auf Kosten des Biotites der weiße Glimmer immer mehr in den Vordergrund; die lepidoblastische Ausbildung wird herrschend und an den von pneumatolitischen Pegmatit-Injektionen durchschwärmten Punkten treffen wir bereits beinahe bloß reinen Muskovit-Glimmerschiefer an, der hier Granat, Disthen, Turmalin und hie und da auch Staurolit führt.

---

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: *A Surián környékének amfibolitjai.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XXXIII., (1915), p. 256—270.

In diesem Glimmerschiefer nun treten zumeist als gangförmige Einlagerungen die Amphibolite auf. Von geomorphologischem Standpunkte aus betrachtet sind dieselben bloß von geringerer Bedeutung, da sie dünn sind und bloß selten bis zu 100 m Mächtigkeit anschwellen. Im allgemeinen sind sie widerstandsfähiger als die Glimmerschiefer, weshalb sie zuweilen als weithin in die Augen springende aufgesetzte Kuppen erscheinen.

Auffallend ist ferner, daß die Amphibolite zuweilen mit Serpentin wechsellagern, oder in Gesellschaft mit Serpentin anzutreffen sind, wie z. B. im Valea Dobrei, in seinem zwischen 1370 und 1440 m Seehöhe gelegenen Talabschnitte. Diesen Umstand betone ich bereits an dieser Stelle deshalb, weil meine bisherigen Beobachtungen, sowie meine noch nicht abgeschloßenen Laboratoriums-Untersuchungen darauf hinzudeuten scheinen, daß die Serpentine und Amphibolite der Kudsir-Szebener Karpatenkette häufig in einem engen genetischen Zusammenhang zueinander stehen.

In Bezug auf die Verteilung der Amphibolite kann ich bloß soviel angeben, daß dieselben hier — in der Surián-Gegend — ohne irgend eine bestimmte Anordnung in den Glimmerschiefern und deren paragenetischen Begleitern auftreten.

Die untersuchten Amphibolite sind nach der Entwicklung und Verteilung ihrer Gemengteile dreierlei:

a) Plagioklas-Amphibolite,

b) Granaten führende Amphibolite, und

c) Zoisit-Amphibolite.

Diese einzelnen Gruppen werden durch Übergangstypen mit einander verbunden.

a) Die Plagioklas-Amphibolite.

Bezeichnend ist für diese Gesteine der Plagioklas, der mäßig basisch ist. Zoisit, Klinozoisit und Granat fehlen entweder gänzlich, oder treten bloß untergeordnet auf. Ihre Textur ist im allgemeinen schiefrig; häufig jedoch von einer an Massen-Gesteine erinnernden Beschaffenheit. In diesen Fällen ähneln sie makroskopisch eher massigen Gesteinen z. B. Dioriten. Ihre

Struktur ist homöoblastisch, und zwar häufig granoblastisch, seltener nematoblastisch und häufig poikiloblastisch.

Amphibolit von **Salanele**, in 1710 m Seehöhe. Dieses Gestein ähnelt makroskopisch mehr einem massigen Gestein; mit freiem Auge erkennen wir in demselben bloß *Plagioklas* und *Amphibol*. Seine weiteren Gemengteiles jedoch sind ferner *Biotit, Quarz, Titanit, Magnetit* und *Apatit*.

Die Plagioklase sind frisch, häufig nach dem Albit-, seltener den Periklin-Gesetz verzwillingt. Xenoblaste; in Schnitten nahe $\perp a$ beträgt ihre Extinktion: $+11°$, was auf sauren *Andesin* ($Ab_{73}An_{27}$) hindeutet.. Das makroskopisch schwarz erscheinende *Amphibol* ist ebenfalls xenoblastisch; mitunter aber ist seine Prismenzone: $\{110\}$, $\{100\}$, $\{001\}$ gut entnehmbar. Seine Individuen sind 1—3 mm lang. Sein Pleochroismus ist ziemlich Stark: γ=grün, β=fahl gelblichtgrün, α=blaß strohgelb. Seine Extinktion auf (010) beträgt $15\frac{1}{2}°$. $\gamma - \alpha = 0{\cdot}020$.[1] Als Einschlüsse treten im Amphibol, Plagioklas, Titanit, Biotit und Magnetit auf. In farblosen Xenoblasten auftretender *Quarz* ist bloß untergeordnet vorhanden. Zwischen den Amphibolen treten bloß sehr untergeordnet kleine Lamellen von *Biotit* auf, deren Pleochroismus: γ=bräunlichrot, $\beta = \gamma$, α=hell lichtgelb. Der Biotit kommt in Form von kleinen schmalen Leisten auch als Einschluß in den Plagioklasen vor. *Titanit* ist verhältnismäßig sehr viel anzutreffen, was übrigens auch durch die chemische Analyse des Gesteines erwiesen worden ist. Seine Individuen sind von gelblichgrauer Farbe, von elliptischer bis unregelmäßiger Form und häufig zu größeren-kleineren Knoten agglomerierend, in anderen Fällen hingegen reihen sich seine Körner Rosenkranz-artig aneinander an. *Apatit* ist in der Form von dünnen prismatischen Idioblasten entwickelt und sind in manchen Fällen auch noch die Konturen seiner Terminalflächen zu beobachten. Schließlich ist *Magnetit* teils in nahezu isometrischen, teils unregelmäßigen Körnern in hinlänglicher Menge, und zwar zumeist in Gesellschaft von Titanit anzutreffen.

---

[1] Mit dem Babinet-schen Kompensator bei *Na*-Licht bestimmt.

Die Struktur des Gesteines ist granoblastisch, mit Übergängen zum Poikiloblastischen. (Tafel I, Fig. 3.) Sp. Gew. 3·179.

Die chemische Analyse ergab:

	%	Mol. %
SiO_2	48·07	52·60
TiO_2	1·43	1·17
Al_2O_3	19·00	12·27
Fe_2O_3	2·94	11·28
FeO	9·64	
MnO	0·13	0·12
CaO	10·55	12·41
MgO	4·11	6·72
K_2O	0·36	0·25
Na_2O	2·99	3·18
P_2O_5	0·89	100·00
Glühverlust	0·51	
Summe:	100·62	

Analytiker: Dr. Koloman Emszt.

Die entsprechenden Osann—Grubenmann'schen Parameter: $S=53·77$; $A=3·43$; $C=8·84$; $F=21·69$; $M=3·57$; $T=0$; $K=0·89$

$a_{2·0}\, c_{5·2}\, f_{12·8}$.

Die neuen Osann'schen Parameter:[1]

$SAlF=17·0,\ 4·0,\ 9·0$

$AlC\,Alk=13·0,\ 13·5,\ 3·5$

$NK=9·3$

$MC=3·5$.

Die Werte stimmen beinahe vollkommen mit jenen des *Gabbro's* aus dem *Seeheimer Gemeindesteinbruch.*

$SAlF=17·0,\ 4·0,\ 9·0$

$AlC\,Alk=13·0,\ 14·5,\ 2·5$

$NK=9·0$

$MC=3·6$.

Amphibolit aus der Nähe des **Valea Dobrei** Ursprunges, aus dem Graben das Valea Dobrei Tales unterhalb des am Wege zwischen **Surián** und dem **Pârva** stehenden Holzkreuzes,

[1] A Osann: Petrochemische Untersuchungen, Heidelberg 1913.

in 1860 m Seehöhe. Die gangartige Einlagerung zwischen den Glimmerschieferbänken mißt 25—30 m.

Dieses Gestein ist zähe, und kann mit dem Hammer nur schwer bearbeitet werden. Makroskopisch besitzt es einen dioritischen Habitus, bei kaum vorhandener Schichtung. Seine Gemengteile sind: *Plagioklas, Amphibol, Magnetit, Apatit, Pyrit,* die noch von den hysterogen Gemengteilen *Chlorit* und *Epidot* begleitet werden.

Die Plagioklase sind trübe, voll von muskovitischen und epidotischen Zersetzungsprodukten, weshalb ihre nähere Bestimmung unterbleiben mußte. Der Amphibol ist unter allen noch zu erwähnenden Amphibolen ganz eigentümlich. An seinen Individuen sind $\{110\}$, $\{100\}$, $\{010\}$ oftmals ganz wohl ausgebildet, seine Terminalflächen aber nicht. Sein Pleochroismus ist von allen anderen besprochenen Amphibolen verschieden, u. zw.: a=gelb; β=gelblichbraun; γ=braun. $c:c$ = cca 16°. Seine Individuen sind z. T. *chloritisch* verändert, welchem Mineral sich bei seiner Zersetzung auch *Epidot* in reichlichem Maße angeschloßen hat, so daß die Amphibolkristalle stellenweise gänzlich durch dieses Chlorit-Epidot-Gemenge ersetzt werden. *Apatit* kommt ziemlich häufig in kleinen, farblosen hexagonalen Schnitten, namentlich als Einschluß in den Amphibolen vor, jedoch auch zwischen den Feldspaten als schmale lange Leisten. *Magnetit* ist in Form von kleinen Körnern, und schließlich *Pyrit* hie und da in 1—2 mm großen derben Körnern zu beobachten.

Die Struktur des Gesteines ist granoblastisch.

Amphibolit S.-lich von der **Stina Gilei,** 1274 m ü. d. M. Dieses Gestein ist feinkörnig, dicht, jedoch hinlänglich schichtig; makroskopisch sind darin bloß die kurzen Amphibolfasern zu erkennen. Seine Gemengteile sind: *Plagioklas, Zoisit, Amphibol, Biotit, Muskovit, Quarz, Magnetit, Titanit, Pyrit, Rutil, Zirkon.*

Der sparsam vorhandene *Plagioklas* ist einem saueren Andesin ähnlich und seine Individuen sind häufig nach dem Albit-Gesetze verzwillingt. Derselbe ist xenoblastisch und tritt in verhältnismäßig untergeordneter Menge, besonders in Vergesellschaftung mit Zoisit auf. Außerdem tritt auch noch Albit

auf, in kleinen wasserklaren Körnern. Der *Zoisit* tritt in winzigen, nahezu isometrischen Körnern auf, stellenweise mit Plagioklas und farblosen Quarzkörnern zu kleinen Knoten angehäuft. Optisch erwies es sich als a—Zoisit: $a=c$, $v>\varrho$, optisch positiv. Ebenfalls in der Nähe der Zoisite trifft man sehr untergeordnet auch winzige Muskovitschuppen an. Unter diesen Gemengteilen ist der *Amphibol* im Übergewicht, während die übrigen bloß die zwischen den Amphibolen freien Zwischenräume ausfüllen. Die Amphibole sind verhältnismäßig kurzfaserig, und mikroskopisch betrachtet von blaßer Farbe; sie sind Xenoblasten, mitunter aber können die Flächen $\{110\}$ und $\{010\}$ an ihnen gut beobachtet werden. Sein Pleochroismus ist: γ=blaßgrün, β = blaß grünlichbraun, α = blaß grünlichgelb. $c:\gamma$ = cca 16°. $\gamma - \alpha = 0{\cdot}021$. Die Amphibol-Individuen werden von den farblosen — namentlich Plagioklas — Gemengteilen förmlich siebartig durchlöchert. *Biotit* tritt bloß hie und da ganz untergeordnet auf in Form von kleinen Schüppchen; sein Axenwinkel ist nahe 0°. *Magnetit* ist häufig in ausgezacktrandigen, sonst isometrischen Körnern anzutreffen. *Titanit* selten als elliptische Körner in den Amphibolen. Sehr selten kommt als Gemengteil ferner *Pyrit* in kleinen Körnern vor. *Rutil* ist ebenfalls ein sehr seltener Gemengteil von gelblichbrauner—lichtgelber Farbe, in einförmigen, oder aber in unregelmäßig gekrümmt-länglichen Körnern. *Zirkon* schließlich ist in Gestalt von farblosen winzigen Prismen anzutreffen.

Die Struktur das Gesteines ist poikiloblastisch, und zwar stellenweise in klassischer Ausbildung, da die farblosen Feldspateinschlüße die Amphibol-Individuen förmlich siebartig durchlöchern. (Tafel I, Fig. 5.)

In diesem Gestein wird der Plagioklas teilweise durch Zoisit ersetzt, der sich auf Kosten des ersteren gebildet hat. Es ist dies daher bereits ein *Übergang zur Gruppe der zoisitischen Amphibolite.*

b) Granat-Amphibolite.

Die Granat-Amphibolite der Surián-Gegend sind ihrer Struktur nach entweder *a)* homöoblastisch, oder *β)* heteroblastisch.

Die ersteren sind gewöhnlich *granoblastisch* und ist in denselben der Granat inbezug auf seine Größe mit den übrigen tipomorphen Gemengteilen gleichwertig. Der Granat der heteroblastischen Granat-Amphibolite bildet zwischen den übrigen Gemengteilen *Porphyroblasten.*

a) Granat-Amphibolit vom Gipfel des **Titianul** (1724 m) zwischen Paragneissen. An seinem Rande ist der Lagergang großkörnig, von pegmatitischer Struktur und erreichen Amphibole, sowie Plagioklase daselbst selbst Ausmaßen von 5—6 cm. Der Typus des Gesteines ist mittelkörnig, schwach geschiefert; makroskopisch ist in demselben bloß der schwarze, bis 3 mm lange Säulen bildenden *Amphibol,* sowie ferner noch *Plagioklas* zu erkennen. Außerdem sind noch im Gesteine vorhanden: *Granat, Quarz, Apatit, Titanit, Magnetit, Pyrit* und *Epidot.*

Der *Plagioklas* bildet zuweilen Zwillinge noch dem Albit-, seltener auch nach dem Periklin-Gesetze. $\perp a$ ist seine Extinktion $+17$ bis $18°$, was einem Oligoklas-Andesin entspricht (31—32% *An*); um a sind sie optisch negativ. Das sp. Gew. das Plagioklases: 2·653 (mit dem Pyknometer bestimmt). Sie sind verhältnismäßig hinlänglich frisch, enthalten aber zuweilen farblose-gelbliche Epidote in Form von kleinen, unregelmäßigen Körnern, als Zersetzungsprodukte, ansonst sind sie serizitisch zersetzt, oder auch bloß einfach in ihrem Inneren getrübt. Die Menge das Plagioklases erreicht beinahe die der Amphibole. Die *Amphibol*-Individuen lassen mitunter $\{110\}$ und $\{010\}$, seltener auch $\{100\}$ erkennen. Pleochroismus: γ = dunkel bläulichgrün, β = grün, a = gelb. $c : c = 16^1/_2°$. $\gamma - a$ = cca 0·030. Sp. Gew. = 3·225 (pyknometrisch). Der Amphibol ist selten *chloritisch* zersetzt. Als Einschluß tritt in ihm häufiger Plagioklas, seltener Biotit auf. *Quarz* ist bloß untergeordnet, resp. tritt er bloß an solchen Stellen in einigermaßen ansehnlicherer Menge zu farblosen Xenoblasten angehäuft auf, wo die Struktur pegmatitisch wird. Und ebendaselbst ist auch der *Biotit* in verhältnismäßig reichlicherer Menge anzutreffen; seine pleochroitischen Farben sind: γ = braun, $\beta = \gamma$, a = orangegelb. Die Menge der *Granaten* ist nicht bedeutend; sie sind klein, rosenrot, isotrope Idioblasten, gewöhnlich in der Form von $\{110\}$;

doch kommen auch xenoblastisch unregelmäßige Körner vor. Häufig enthalten sie kleine anisotrope Mikrolithe. *Apatit, Titanit, Magnetit* und wenig *Pyrit* kommen in der gewöhnlichen Ausbildung vor.

Die Struktur des Gesteines ist granoblastisch, die sehr an die Struktur von Gabbro erinnert. (Tafel I, Fig. 2.)

In diesem Amphibolit ist die Menge der Granaten noch gering, so daß man diesen Fall als einen Übergang zur vorigen Gruppe betrachten könnte.

Granat-Amphibolit aus dem zwischen **D. Cioaca** und **Muncelul Birailor** in SW-licher Richtung ins **Taja—Tal** hinabziehenden kleinen Graben, in 1190 m Seehöhe. Dieses ziemlich grobkörnige Gestein bildet ein etwa 2 m starkes Lager zwischen Biotit-Glimmerschiefern; hie und da wird es von dünnen — 1 mm starken — Quarzschnüren durchzogen. Sein Einfallen ist 17^h 30°. In demselben Graben ist ferner in 1050 m Seehöhe ein 4 m mächtiges und in 1000 m ein cca 5 m starkes Amphibolitlager aufgeschlossen.

Das in 1190 m Höhe vorkommende Gestein zeigt makroskopisch 0·5 cm lange *Amphibol*-Säulen, *Quarz, Plagioklas,* kleine *Granaten* und wenig *Biotit.* Mikroskopisch wurden noch erkannt *Zoisit, Muskovit, Magnetit, Apatit* und *Rutil.*

Die *Plagioklase* sind Xenoblaste, mitunter nach (010) tafelig ausgebildet. Ursprünglich waren sie zwill. lamelliert, jedoch kann die Verzwilligung zumeist kaum mehr beobachtet werden, weil sie stark zersetzt, getrübt, teilweise zu *Serizit,* teils zu *Zoisit* umgewandelt sind. Außer dem Serizit kommen hie und da auch einzelne *Muskovitblättchen* vor. *Quarz* ist in wasserhellen durchsichtigen Xenoblasten in hinlänglicher Menge vorhanden; seine Dimensionen erreichen zuweilen 0·5—0·6 mm; häufig sind Amphibolmikrolithen in ihnen eingeschlossen. Der *Amphibol* ist im Allgemeinen xenoblastisch entwickelt, trotzdem sind an ihnen die Flächen $\{110\}$ und $\{010\}$ wahrzunehmen. Pleochroismus: γ = licht bräunlichgrün, β = grünlichgelb, α = lichtgelb. $c : c$ 17°. $\gamma - \alpha = 0{\cdot}019$. Stellenweise ist der Amphibol von dichten Feldspatgruppen durchsetzt. Der *Granat* tritt verhältnismäßig zurück und ist bloß in kleinen, mitunter bis zu

0·2 mm ansteigenden isometrischen Körnern zu beobachten. *Biotit* kommt nur stellenweise in bestimmten dünnen Lagen vor, wie dies auch in den Handstücken gezeigt werden kann. Über *Magnetit* und *Apatit* läßt sich nichts besonderes sagen. *Rutil* ist in Form von kleinen eiförmigen Körnchen sichtbar und namentlich in Amphibol eingeschlossen; sein Pleochroismus: ε = bräunlichgelb, ω = lichtgelb.

Das Gestein ist ausgezeichnet geschichtet; seine Struktur ist granoblastisch, gepaart stellenweise mit der poikiloblastischen.

Zufolge des hier untergeordnet auftretenden Zoisites bildet dies Gestein bereits einen Übergang zum Zoisit-Amphibolit.

β) Granat-Amphibolit vom **Pareul Rescoalei,** in SW—NO-lich streichenden paragneisartigen Glimmerschiefer, 950 m ü. d. M. Lagergang in Glimmerschiefer.

Eine Schichtung des Gesteines ist bloß schwach entwickelt, gegenteilig ist seine Struktur eher massig zu nennen. Makroskopisch sind in ihm *Granat*porphyroblasten bis zu $^1/_2$ cm Durchmesser, *Amphibol* und stellenweise weiße Flecken zu sehen, zwischen denen hie und da auch noch *Muskovit*blättchen glitzern. Mit dem Mikroskop sind ferner noch zu entdecken: *Plagioklas, Biotit, Zoisit, Magnetit, Rutil, Zirkon, Titanit* und *Apatit.*

Die *Plagioklas*-Individuen sind bloß selten verzwillingt und gehören dem Albit und einem basischen Oligoklas an. Stellenweise sind sie durch Amphibolkörner-Einschlüsse wie durchlöchert. Die *Amphibole* schaaren sich ohne jedweden Idiomorphismus der Individuen in dichten Aggregaten zu schmalen Flecken zusammen, aus denen hie und da auch größere Individuen hervortreten. Ihr Pleochroismus: γ = lichtgrün, β = blaß grünlichgelb, α = blaßgelb: $c : \mathfrak{c} = 18°$. $\gamma - \alpha = 0{\cdot}022$. Sp. Gew.: 3·078. Amphibol umgibt in schmalen, langen Lappen die Granaten dichter, als sonst anderswo. Diese Amphibolfasern stellen sich mit ihren c Axen nahezu senkrecht zur Granatfläche, ohne daß jedoch eine typische Kelyphit-Struktur zu Stande kommen würde (Tafel I, Fig. 1). *Granaten* kommen in großer Zahl vor und erscheinen ihre rosenroten bis zu 5 mm anwachsenden Individuen als Porphyroblasten. Die Granaten verhalten sich isotrop

und enthalten als Einschlüsse Rutil. *Zoisit* kommt in kleinen Körnern, ohne regelmäßige Konturen, jedoch zumeist doch von abgerundeter Form in den bereits makroskopisch beobachteten weißen Flecken im Vereine mit Plagioklas und wenig *Muskovit* vor. Zufolge seiner indigoblauen Interferenz-Farbe ist er leicht zu erkennen. Der *Biotit* ist bloß sehr untergeordnet in kleinen Lappen zu sehen; namentlich dort, wo irgendein Granat mit den weißen Flächen in Berührung tritt. *Magnetit* ist teils im Amphibol, sowie auch außer demselben in den zoisitischen Plätzchen anzutreffen. *Rutil* in kleinen, elliptischen Körnern in den Amphibolen, sowie seltener auch in den Granaten. Der Pleochroismus des Rutils ist: ε = bräunlichgelb, ω = gelb. Der *Zirkon* ist in farblosen Kriställchen und ebenso selten der *Titanit* in eierförmigen Körnchen anzutreffen. *Apatit* wie gewöhnlich.

Die Struktur dieses Amphibolites ist heteroblastisch, gekennzeichnet durch größere porphyroblastisch ausgeschiedene Granaten. Die letzteren sind in eine mehr-weniger granoblastische bis diablastische Grundmasse eingebettet. Nachdem in diesem Gesteine der Plagioklas z. T. bereits durch Zoisit ersetzt wird, bildet es schon einen Übergang zur nächsten Gruppe.

Das sp. Gew. des Gesteines: 3·152.

Seine chemische Zusammensetzung:

	%	Mol. %
SiO_2	47·65	50·59
TiO_2	0·63	0·50
Al_2O_3	19·33	12·11
Fe_2O_3	1·57	9·83
FeO	9·63	
MnO	0·12	0·10
CaO	10·67	12·18
MgO	7·55	11·99
K_2O	0·22	0·15
Na_2O	2·47	2·55
P_2O_5	0·42	100·00
Glühverlust	0·68	
Summe	100·94	

Analytiker: Dr. Koloman Emszt.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Die entsprechenden Parameter

$S=51{\cdot}09$; $A=2{\cdot}70$; $C=9{\cdot}41$; $F=24{\cdot}69$; $M=2{\cdot}77$; $T=0$; $K=0{\cdot}85$

$a_{1{\cdot}5}\, c_{5{\cdot}0}\, f_{13{\cdot}5}$

$SAlF=16{\cdot}0,\ 3{\cdot}5,\ 10{\cdot}5$
$AlC\,Alk=13{\cdot}5,\ 13{\cdot}5,\ 3{\cdot}0$
$NK=9{\cdot}4$
$MC=4{\cdot}9$.

Diese Werte stehen denen des *Gabbros vom Seeheimer Hoflager* am nächsten u. zw.

$SAlF=16,\ 4,\ 10$
$AlC\,Alk=13,\ 13{\cdot}5,\ 3{\cdot}5$
$NC=9{\cdot}0$
$MC=4{\cdot}1$.

c) Zoisit-Amphibolite.

Charakteristisch für diese Gesteine ist das Auftreten von Zoisit in größeren Mengen. Plagioklas tritt dem Gemengteil gegenüber in den Hintergrund. Die Zoisit-Individuen gruppieren sich zu kleineren Gruppen, häufig gleichsinnig orientiert. Diese Gruppen fallen als weiße Flecken bereits schon makroskopisch auf. Häufig sind in diesen Flecken verhältnismäßig ziemlich viel Plagioklase anzutreffen, da deren letzteren Substanz bei der Zoisitbildung nicht gänzlich aufgebraucht worden ist. Mitunter aber findet man den Zoisit auch regelmäßiger im Gesteine verteilt an. Die Struktur der hieher gehörigen Gesteine ist homöoblastisch.

Zoisit-Amphibolit aus dem **Valea Dobrei Tale.** Dieses im Biotit führenden Glimmerschiefer des Valea Dobrei Tales liegende Gestein bildet 1390 m ü. d. M. einen 25—30 m starken Lagergang, mit einem Einfallen nach 19^h unter 35°. Stellenweise durchkreuzen dieses Lager dünne Spalten, die durch sekundäre Quarz-Infiltrationen ausgefüllt sind.

Das Gestein ist wohl geschichtet, was vornehmlich eine Folge der nahezu parallel angeordneten Amphibole ist. Makroskopisch kann im Gesteine bloß der in 0·5—2·0 mm langen

Fasern vorliegende Amphibol erkannt werden, zwischen denen verstreut kleine *weiße Flecken* liegen. Diese letzteren bestehen in überwiegender Menge aus *Zoisit* und *Plagioklas*, wie u. d. Mikr. ersichtlich. Außer den genannten Gemengteilen sind noch anzuführen: *Muskovit (Serizit), Magnetit, Titanit, Apatit, Rutil.*

Plagioklas ist hier bedeutend weniger, als in allen den bisher besprochenen Gesteinen und kommen dessen Individuen hauptsächlich in der Nähe der Zoisite vor. Seine Individuen sind zumeist stark getrübt und serizitisiert. Sie erwiesen sich als basische Oligoklase und als Albite.

Der *Amphibol* ist fahlgrün, schwach pleochroitisch: $\gamma =$ fahlgrün; $\beta =$ licht grünlichgelb, $\alpha =$ sehr licht grünlichgelb. $c : \mathfrak{c} =$ cca 17°. $\gamma - \alpha = 0{\cdot}018$.

Der *Zoisit* stellt sich als der Vertreter des Plagioklases dar und kommt in größter Menge an den bereits makroskopisch erwähnten linsenförmigen weißen Flecken vor. Seine Individuen sind ziemlich idioblastisch, da sie zumeist als länglich parallelogrammartige, oder quadratische Schnitte auftreten. Ihre Spaltung nach $\{010\}$ ist gut zu erkennen. Im Allgemeinen sind sie kürzer, als 0·2 mm, mitunter aber können sie noch einmal so lang werden. Sie sind farblos, optisch positiv; $\mathfrak{a} = c$; $v > \varrho$; zeigen eine tief indigoblaue Interferenzfarbe. Im Ganzen erweisen sie sich also als *α-Zoisite.* (Taf. I, Fig. 4.) Mitunter sind sie jedoch nicht nur in den erwähnten weißen Flecken, sondern auch — obwohl untergeordnet — zwischen den Amphibolen anzutreffen. Die Zoisit-Prismen sind zumeist parallel mit der Schieferung des Gesteines eingelagert.

Die erwähnten weißen Flecke bestehen vorwiegend aus Zoisit, jedoch kommen in ihnen untergeordnet auch *Plagioklase* vor, die aber stark serizitisiert sind; schießlich ist in ihnen auch noch wenig *Amphibol* und *Titanit* nachzuweisen.

Magnetit tritt in Form von kleinen Körnchen auf und sind dieselben häufig von einem rotbraunen Saume umgeben. *Apatit* und *Rutil,* wie gewöhnlich. *Titanit* in farblosen bis grauen eiförmigen Körnchen als Einschlüsse im Amphibole oder in den weißen zoisitischen Flecken.

Die Struktur des Gesteines ist die homöoblastische.
Das sp. Gew. des Gesteines beträgt: 3·063.

Seine chemische Zusammensetzung:

	%	Mol. %
SiO_2	45·40	48·12
TiO_2	0·75	0·60
Al_2O_3	15·57	9·73
Fe_2O_3	1·90	9·00
FeO	8·41	
MnO	0·22	0·19
CaO	12·21	13·91
MgO	10·14	16·07
K_2O	0·68	0·46
Na_2O	1·87	1·92
P_2O_5	1·01	100·00
Glühverlust	1·38	
Summe	99·54	

Analytiker: Dr. Koloman Emszt.

Daraus die entsprechenden Parameter:

$S=48·72$; $A=2·38$; $C=7·35$; $F=31·82$; $M=6·56$; $T=0$; $K=0·80$

$a_{11}\ c_{3·7}\ f_{15·2}$

$SAlF=14·5,\ 3·0,\ 12·5$
$AlCAlk=11·0,\ 16·5,\ 2·5$
$NK=8·0$
$MC=5·4.$

Diese Werte stehen jenen des *Basaltes von Pta Delgada* sehr nahe:

$SAlF=14·5,\ 3·0,\ 12·5$
$AlCAlk=10·5,\ 16,\ 3·5$
$NK=7·8$
$MC=5·2.$

Zoisitamphibolit aus dem mittleren Abschnitte des **Valea Ditei** Tales. In einer Seehöhe von cca 1100—1130 m stößt man im genannten Tale auf einen zwischen die Glimmerschiefergruppe eingelagerten nahezu 150 m mächtigen Amphibolitlagergang, dessen Einfallen gegen $15—16^h$ gerichtet ist unter 35°.

Das kleinkörnige, gut geschichtete Gestein läßt makroskopisch Amphibol und weiße (zoisitische) Flecken erkennen.

Der *Plagioklas* tritt in diesem Gesteine auffallend zurück. Albit-Zwillingsverwachsungen sind am ihm häufig zu beobachten; in Schnitten nahe $\perp$ zu a beträgt seine Extinktion $+14°$, was auf Oligoklas-Andesin hindeutet. Einige nicht verzwillingte Körnern erwiesen sich als *Albite*. Hie und da sind sie serizitisch zersetzt. Der *Zoisit* mit seiner in pol. Lichte indigoblauen Farbe kommt in unregelmäßigen, mitunter ausgezacktrandigen Körnern im Bereiche der weißen Flecke vor. Diese letzteren zeigen außer den Zoisiten auch noch etwas *Plagioklas* auf, außerdem noch einige Muskovitblättchen und einige *Quarz*körner. Die letzteren weisen häufig zahlreiche, winzige Flüßigkeitseinschlüsse auf, die oft linienartig aneinander gereiht sind. Die *Amphibole* sind klein, und erreichen bloß selten Dimensionen bis zu 0·5—1·0 mm; im allgemeinen sind sie Xenoblasten, jedoch kann an ihnen $\{110\}$ bestimmt beobachtet werden. Ihr Pleochroismus ist; γ = blaß graugrün, β = grünlichgelb, a = licht grünlichgelb. $c : c$ = cca 19°. *Magnetit*, *Apatit* kommen nur sehr untergeordnet vor. *Rutil* in prismatischen, jedoch abgerundeten Körnern, oder seltener knieförmig geknickten Zwillingen, zumeist als Einschlüsse in den Amphibolen, aber auch außer ihnen; ihr Pleochroismus ist: ε = dunkel harzgelb, ω = licht harzgelb. Der *Titanit* kommt in graugelben, nahezu farblosen Körnern bloß sehr untergeordnet vor.

Die Struktur des Gesteines ist poikiloblastisch.

Sp. Gew. des Gesteines: 3·120.

Seine chemische Zusammensetzung:

	%	Mol. %
SiO_2	50·30	51·02
TiO_2	0·22	0·17
Al_2O_3	14·02	8·38
Fe_2O_3	1·18	8·83
FeO	9·32	
MnO	0·21	0·18
CaO	12·75	13·90
MgO	10·62	16·10
K_2O	0·41	0·26
Na_2O	1·18	1·16
P_2O_5	0·34	100·00
Glühverlust	0·15	
Summe	100·70	

Analytiker: Dr. Koloman Emszt.

Daraus ergeben sich die entsprechenden Parameter:

$S=51·19$, $A=1·42$, $C=6·96$, $F=32·05$, $M=6·94$, $T=0$, $K=0·99$.

$a_{0·7}\ c_{3·4}\ f_{15·9}$

$SAlF=15·5,\ 2·5,\ 12·0$

$AlCAlk=10·5,\ 17·5,\ 2·0$

$NK=8·1$

$MC=5·4$.

Diese Ergebnisse stehen den entsprechenden Zahlen des *Twins Hypersthen-Diabas* sehr nahe:

$SAlF=15·5,\ 2·5,\ 12·0$

$AlCAlk=10·5,\ 17·5,\ 2$

$NK=8·7$

$MC=5·9$.

Zoisitamphibolit aus dem **Valea Ditei,** nahe zur Einmündung dieses Tales in die **Taja.** Einfallen des Lagerganges 15^h 35°.

Ein ausgezeichnet geschichtetes Gestein, in dem dunkelgraue, in überwiegender Menge aus Amphibol bestehende Lagen mit weniger auffallenden und selbst spitzig auskeilenden, dünnen, weißen Lagen abwechseln. Die ersteren setzen sich vornehmlich aus *Amphibol,* die letzteren dagegen bestehen namentlich aus *Plagioklas,* außerdem wenig *Zoisit, Muskovit* und stellenweise rostroten eisenoxidischen Verwitterungsprodukten.

Die *Plagioklase* sind teils frisch und Albitähnlich, teils bereits von Serizitschüppchen erfüllt. Sie erweisen sich als mehrfach zusammengesetzte Albitzwillinge, mit hinlänglich dicht angeordneten Lamellenzügen; seltener sind sie jedoch auch Perikline. In Schnitten $\perp$ zu (010) zeigen sie eine dem saueren Andesin, *An* max. 45%, entsprechende Extinktion. *Zoisit* kommt in farblosen, in dickeren Schliffen jedoch etwas ins gelbliche spielenden unregelmäßigen kleinen Körnern vor. Stellenweise aber erreichen sie selbst 1 mm Größe. Der Zoisit tritt eigentlich bloß in untergeordneter Menge auf. *Muskovit* erblickt man in kleinen Blättchen, häufig an gewissen Stellen stärker angehäuft, jedoch im Ganzen das Amphibol-Feldspatgemenge filzartig durchsetzend. In den erwähnten weißen Lagen ist dieser letztere Mineral in verhältnismäßig größerer Menge zu beobachten. Die Hauptmasse das Gesteines wird eigentlich vom *Amphibol* gebildet, der xenoblastisch entwickelt ist und höchstens hie und da die Flächen $\{110\}$ erkennen läßt. Sein Pleochroismus ist verhältnismäßig schwach: γ = blaßgrün, β = blaß gelblichgrün, α = blaß grünlichgelb. $c : \mathfrak{c}$ = cca 20°. Die Amphibole erscheinen stellenweise ausgebleicht, faserig-stanglig parallel zu c. An solchen stellen sind gewöhnlich auch die Feldspate serizitisiert und ebenda pflegt auch Zoisit in größerer Menge aufzutreten. Der *Biotit* ist mitunter ebenfalls zwischen den Amphibolen zu beobachten. *Rutil* ist ziemlich häufig, ja sogar mitunter mit der Lupe zu erkennen in Form von kleinen, zu Knoten angehäuften Körnern; ihr Pleochroismus ist ganz schwach: ε = bräunlichgelb, ω = gelb. Zuweilen vereinigen sich die Rutilkörner zu dünnen, linsenförmig ausgezogenen Schnürchen. *Titanit* ist in der Form von unregelmäßigen, oder aber auch abgerundeten farblosen bis grauen Körnchen wahrzuneh-

men. Schließlich kann man hie und da, namentlich in den erwähnten weißen Schnüren, eisenoxidische rotbraune Zersetzungsprodukte beobachten.

In diesem Gesteine tritt der Zoisit bereits stark zurück, so daß man es in diesem Falle mit einem *Übergange zur Plagioklas-Amphibolit-Gruppe* zu tun hat.

*

Wie aus Vorstehendem ersichtlich, sind die Amphibolite der Surián-Gebirgsgruppe nach der Beschaffenheit und der Verteilung ihrer Gemengteile ziemlich abwechslungsreiche Gesteine. Auch ist ihre strukturelle Entwicklung ziemlich variierend. Dem gegenüber ist ihre beinahe gleichbleibende chemische Zusammensetzung außerordentlich auffallend. Die Analysen und die aus ihnen hergeleiteten Parameterwerte sind in allen behandelten Fällen sehr nahe zueinander liegend. Im Ganzen deuten diese Verhältniszahlen auf die entsprechenden eines *Gabbro-Magmas* hin. Es erscheint also auch durch die vorgelegten vier Analysen erwiesen, daß unsere Amphibolite *eruptiven Ursprunges* sind, und zwar daß es sich in diesem Falle *um Abspaltungen eines Gabbroiden Magmas* handelt.

Erklärung der Tafel.

1. Granat-Porphyroblast umgeben von Amphibolfasern, aus dem Granat-Amphibolite des Pareu Rescoalei. Vergrößerung: 1×25.
2. Granoblastische Struktur des Amphibolites zwischen gekreuzten Nikols, vom Gipfel des Titianul. Vergr.: 1×25.
3. Struktur des Amphibolites vom Salanele. Vergr.: 1×25.
4. Prismatisch entwickelte Zoisite aus dem Zoisit-Amphibolit im Valea Dobrei, 1390 m Seehöhe. Vergr.: 1×25.
5. Struktur des S-lich der Stina Gilei neben der Kuppe 1274 auftretenden Amphibolites. Die Amphibole sind zufolge zahlreicher Feldspateinschlüsse förmlich siebartig durchlöchert. Vergr.: 1×25.

8.

BEITRÄGE ZUR KENNTNIS DER ABYSSISCHEN GESTEINE DES SYENITSTOCKES VON DITRÓ.

Von B. MAURITZ und MIK. VENDL.

Vorgelegt der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 4. Juni 1923.*

I.

Die außerordentliche Variabilität der bis jetzt untersuchten abyssischen Gesteine des Syenitmassivs von Ditró spricht für eine sehr tiefgreifende magmatische Differentiation. Beginnend mit den sauersten Alkaligraniten (Natronalaskit) findet man durch die Reihe der Alkalisyeniten bis zu den basischeren Nephelinsyeniten fast sämtliche Typen. Herrschender Typus ist der Biotit-Nephelinsyenit, welcher durch die Aufnahme wechselnder Menge von Hornblende endlich in reinen Amphibolfoyait übergeht. Die Übergangsglieder — Biotit-Amphibol-Nephelinsyenite — sind ziemlich häufig, aber reine Hornblende-Nephelinsyenite findet man sehr selten. Die bisherigen Beobachtungen lassen erkennen, daß durch den Eintritt der Hornblende in das Gesteinsgewebe nicht nur die Menge des Glimmers abnimmt, sondern damit gleichzeitig stellenweise auch der Nephelin in den Hintergrund tritt oder sogar ganz verschwindet und es bildet sich der ziemlich verbreitete Typus des Umptekit-Hornblendepulaskit heraus. Reine Biotit-Alkalisyenite sind selten zu finden. Hie

---

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: *Adatok a ditrói szienitmasszivum abisszikus kőzeteinek ismeretéhez.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XL., (1923.), p. 271—313.

und da spielt auch der Cancrinit eine wichtige Rolle, so daß man richtige Cancrinitsyenit-Typen aufstellen kann. Es ist äußerst auffallend, daß der altbekannte «Ditróit-Typus» eben nur an einzelnen Stellen und nur in kleinen Flecken und Adern erscheint. Ein ebenfalls seltener Typus des Syenitstockes wird durch den Aegyrin-Nephelinsyenit representiert.

Sämtliche Gesteine wurden kräftigen dynamischen Wirkungen ausgesetzt, deren Resultate einerseits in der Zertrümmerung der verschiedenen Gemengteile und in der undulösen Auslöschung der Feldspate, anderseits in der häufig auftretenden typischen Trümmerkranz-Struktur und in der feingitterigen Beschaffenheit der Mikrokline schön zur Geltung kommen. Anläßlich der eingehenden Beschreibung der Gesteine werden wir diese Erscheinungen gründlich besprechen. Es muß nähmlich nach unser Auffassung zur Feststellung der Zeit der Intrusion diesen Erscheinungen, sowie den mit den Dislokationen eng verbundenen postvulkanischen (pneumatolitischen) Vorgängen eine größere Bedeutung zugeschrieben werden, da — wie es bekannt ist — die Kontaktzone des Massivs ausschließlich aus archaischen Phylliten, besteht, welche keine nähere Auskunft bezüglich der Zeit der Intrusion geben.

Die Fundorte der untersuchten Gesteine kann man in die obenerwähnten Gruppen folgenderweise einreihen:

1. Biotit-Nephelinsyenite.

1. *Várpatak*-Bach, in der Nähe der Mündung des *Károlypatak*-Baches, bei ✧ 1035.
2. Steinbruch im *Nagy-Kürücpatak*-Tal.
3. Östlicher Abhang der Kuppe *Nagy-Kürüc feje*, ✧ 1246.
4. *Várpatak*-Bach, zwischen ✧ 1035 und ✧ 1151.
5. Südabhang der Kuppe *Bükkfő*.
6. Gänge am Ostabhang des *Várpatak*-Baches zwischen ✧ 1009 und ✧ 1068; Übergangstypen in die Biotitpulaskite.
7. Gänge am Ostabhang des *Várpatak*-Baches zwischen ✧ 1009 und ✧ 1068.
8. Kuppe *Csanód feje*.

9. *Várpatak*-Bach, Ostabhang gegenüber ✧ 1035.

10. Zusammenfluss der Bäche *Várpatak* und *Részepatak*; Übergangstypus in die Aegyrinsyenite.

11. Nordwestlicher Abhang der Kuppe *Farkas sarka*.

12. *Csobothegy*-Berg, östlich von ✧ 1099.

13. Nördlicher Steinbruch am Ostabhang des *Nagy-Kürücpatak*-Baches.

II. Hornblende-Biotit-Nephelinsyenite.

1. Rückgrat vom *Várbükk*, südöstlich von ✧ 1297.

2. Steinbruch im *Nagy-Kürücpatak*-Tal.

3. *Farkaspatak tető*, südwestlich von ✧ 1091, nahe zum Hornblende-Nephelinsyenit.

4. *Várpatak*-Bach, Mündung vom Osten, bei ✧ 1035.

5. *Angi patak sarka*, stromabwärts vom *Beretpatak*-Bach, nahe zum Biotit-Nephelinsyenit.

6. Nördlich vom *Várbükk feje*, ✧ 1499.

7. Nordwestlicher Abhang des *Farkas sarka*.

8. *Károlyvésze*, südwestlich von ✧ 1130.

III. Hornblende-Nephelinsyenit.

Várpatak, Gang unter ✧ 1151; nordöstlich von ✧ 1035.

IV. Aegyrin-Nephelinsyenit.

Nordwestlicher Abhang des *Farkas sarka*.

V. Sodalitsyenite und Sodalit-Nephelinsyenite.

1. Steinbruch im *Nagy-Kürücpatak*-Tal.

2. *Várpatak*-Bach, ✧ 1035, in der Nähe der Syenit-Phyllit-Kontaktzone.

3. Nordwestlicher Abhang des *Farkas sarka*.

VI. Cancrinitsyenite.

1. *Várpatak*-Bach, östlicher Abhang von ✧ 1068.

2. *Békénypatak*-Bach, Wasserriß westlich von ✧ 1106.

3. *Károlyvésze*, südwestlich von ✧ 1130.

4. *Fehérpatak sarka*, nordöstlich bei ✧ 1394.

5. *Várpatak*, nördlich bei dem Zusammenfluß der beiden Ströme.

VII. Umptekite.

1. *Károlypatak*-Bach, südwestlich von ✧ 1130 in der Talmündung.

2. *Csanódpatak*-Bach, östlich von ✧ 990.

3. *Várpatak*-Bach, nördlich von ✧ 1009, graue schiefrig gestaltete Gänge im heller gefärbten Syenit.

4. *Várpatak*-Bach, flussabwärts 200 m entfernt von der Mündung des Baches *Beret útja patak*, heller gefärbte Gänge im glimmerreichen Gestein.

VIII. Biotit-Alkalisyenite.

1. *Várpatak*-Bach, graue Gänge im roten Syenit.

2. *Várpatak*-Bach, nördlich von ✧ 1035.

3. *Várpatak*-Bach, ✧ 1035, unmittelbar nördlich von der Kontaktzone.

4. *Várpatak*-Bach, ✧ 1035, roter Syenit.

5. *Várbükk*, östlich von ✧ 1297, roter Syenit am Abhang.

6. *Károlyvésze*, südwestlich von ✧ 1130.

7. *Nagy-Kürücpatak*-Bach, dunkles Gestein an der östlichen Seite des südlicher liegenden Steinbruches.

I. Biotit-Nephelinsyenite.

1. Fundort: Zusammenfluß der Bäche *Várpatak* und *Károlypatak*, bei ✧ 1035 (Nr. 6).[1]

Mittelkörniges, granitisch gestaltetes, hellgefärbtes Gestein; aus dem Feldspat-Nephelin-Gemenge heben sich die dunkelglänzenden Biotit-Haufen scharf hervor.

---

[1] Die Zahl neben dem Fundort bezeichnet die Nummer der Handstücke und der Dünnschliffe in der Sammlung des Min.-petr. Universitätsinstitutes.

Herrschender Feldspat ist der Mikroklin in xenomorphen Individuen mit charakteristischer Gitterstruktur. Ziemlich verbreitet ist die perthitische Verwachsung mit dem albitlamellierten Plagioklas (Albit). Selbst den Plagioklas findet man nur in kleiner Menge und nur in Form kleiner Kristalle, deren Brechungsexponente mit dem des Balsams ungefähr übereinstimmen; die Albitzwillingslamellen sind sehr schmal, die Auslöschungsschiefe in der symmetrischen Zone sehr klein; somit gehört der Plagioklas in die Oligoklasreihe. Einzelne der Individuen sind wellig-zonar gebaut. Mikroklinantiperthite findet man nur sehr vereinzelt.

Nephelin ist der andere herrschende farblose Gemengteil. Die grossen Individuen bildeten sich xenomorph aus, obzwar in den Konturlinien eine Tendenz nach der Quadratform erkennbar ist. Der Nephelin enthält sehr viele Einschlüsse (Mikroklin, Cancrinit, Biotit und Muskovit), infolge deren die Durchschnitte zwischen gekreuzten Nicols siebartig durchlöchert erscheinen.

In ziemlich großer Fülle erscheint der Cancrinit, dessen gänzlich xenomorphe Körner den Nephelin siebartig durchlöchern; seltener bildet derselbe Einschlüsse im Mikroklin Die großen Nephelin- und Mikroklinkörner werden von einem typischen Mörtelkranze umgeben; letzterer besteht aus einem Gemenge verschiedener Mineralien, hauptsächlich aus Mikroklinkörnchen, unter denen aber auch der Cancrinit in größerer Menge erkennbar ist.

Der reichliche Biotit bildet xenomorphe Lappen und Fetzen mit buchtigen Konturlinien; die Lamellen werden zu fetzenförmigen Haufen zusammengedrängt. Die optischen Eigenschaften stimmen in sämtlichen Individuen überein, nur der Pleochroismus ist zweierlei. Optischer Axenwinkel fast 0°;

$c : a$ = cca 0°; die Absorption immer $c = b > a$; der Pleochroismus
a = strohgelb, bzw. hellgelb,
$b = c$ = sehr dunkelbraun, bzw. sehr dunkelgrün.

Stellenweise wächst der Biotit mit Muskovit parallel zusammen. Oft kommen der braune und der grüne Biotit in demselben Glimmerhaufen zusammen vor; dieser Umstand scheint dafür zu spre-

chen, daß der Unterschied in der Farbe und im Pleochroismus nur eine Folge der Ausbleichung ist.

Der Muskovit bildet einen wichtigen Gemengteil des Gesteins; die scharfe parallele Verwachsung mit Biotit, sowie der Umstand, dass derselbe in dem auf dynamisch-metamorphen Wege gebildeten Mörtelkranz ein stets vorhandener Gemengteil ist, scheinen für seine primäre Natur zu sprechen. In andern Fällen ist die Entstehung aus grünem Biotit sehr wahrscheinlich, indem der Saum der Biotitlappen sich zerfasert und die so entstandenen Lücken mit Muskovit ausgefüllt werden.

Neben einigen, xenomorphen Magneteisen- und Epidotkörnchen erkennt man sehr spärliche, winzige Titanitkörnchen. Die Struktur ist poikilitisch hypidiomorph-körnig, bzw. übergeht in die Mörtelstruktur.

2. Steinbruch im *Nagy-Kürücpatak*-Tal (Nr. 19).

Mittelkörniges Gestein von granitischem Habitus; mit freiem Auge erkennt man den weißen Feldspat und den typisch ölgrünen Elæolit; inmitten der Gemenge der beiden Gemengteile befinden sich die Biotithaufen.

Reichlich vorhanden ist der feingitterige Mikroklin, dessen xenomorphe Körner oft perthitisch verwachsen sind. Ein Perthit, genau parallel der Fläche (001) geschliffen, ergab folgende Auslöschungen:

im den Albitschnüren $a'M = 2-3°$,
im Mikrolin _ _ _ _ $a'M = 15-16°$,

ein anderer Perthit, mit (010) parallel geschliffen, ergab:

im Albit _ _ $a'P = 15-20°$,
im Mikrolin $a'P = 5°$

(γ steht zum Schliffe nicht senkrecht).

Die Feldspäte beider Perthitschliffe sind schwächer lichtbrechend als der Balsam. Der albitische Teil einer dritten perthitischen Verwachsung wurde vom Schliffe senkrecht zu γ getroffen; derselbe ergab $a'P = 16-17°$; diese Auslöschungswinkel entsprechen der Zusammensetzung $Ab_{94}An_6$. Die beiden Feldspäte einer dritten mikroklinperthitischen Verwachsung zeig-

ten einen etwas schiefen γ-Austritt, wobei der Schliff mit der Fläche (010) fast parallel läuft; die Auslöschungswinkel sind

$$a'P = +5°$$ d. h. Mikroklin,
$$a'P = 19°$$ d. h. Albit.

Die Mikroklinperthite zeigen die Murchisonit-Spaltlinien sehr scharf; in diesen Perthiten folgen die Albitschnüren die Murchisonit-Spaltlinien.

Außer den Mikroklin- und Perthitindividuen finden wir im Gestein reichlich sehr kleine, wasserklare Plagioklaskörnchen, die aus äußerst schmalen und feinen Albitzwillingslamellen bestehen; Lichtbrechung derselben: $a' \leqq$ Balsam $< \gamma'$; optischer Charakter positiv; Axenwinkel rund 80°; Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $a'M = -14 - 13°$, d. h. Albit; an anderer Stelle dieses zonar gebauten Korns ist $a'M = +7°$; diese Auslöschungsschiefe spricht für einen Oligoklas $Ab_{75}An_{25}$ (in diesem Teil steht der Austritt a fast senkrecht zum Schliffe); die beiden Teile verfließen ineinander undulierend. Somit erweisen sich die Plagioklase als Albite und Oligoklasalbite; die Basizität kann aber bis zum Oligoklastypus von Twedestrand reichen.

Elæolit findet sich reichlich im Gestein und zwar in ziemlich großen, xenomorphen Körner, welche verhältnismäßig frisch sind. Das Mineral enthält einschlußförmig Cancrinit, Mikroklin und Erze. Der Elæolit wird oft von einem Kranze xenomorpher Cancrinitkörner umgeben; in andern Fällen füllen die Cancrinitkörner die vielverzweigte Adern der Elæolitindividuen aus. Mit dem Cancrinit erscheint auch der Kalkspat, welcher sonst im Mikroklin Einschlüsse bildet oder zwischen den Feldspaten die Lücken ausfüllt.

Die farbigen Gemengteile sind durch den Biotit (Lepidomelan) vertreten, welcher meistens fetzenförmige Haufen bildet, aber auch in vereinzelten Lappen sichtbar ist; seine Menge ist unbedeutend; der optische Axenwinkel ist fast 0°;

$c : \mathfrak{a} = 0° - 1°$; der Pleochroismus kräftig:
$\mathfrak{a}$ = blaß strohgelb,
$\mathfrak{b}$ = schmutzig dunkelbraun, etwas grünlich,
$\mathfrak{c}$ = schmutzig dunkelbraun.

Der graugrünliche Titanit bildet große, automorph ausgebildete, verstreute Individuen. Der Saum der zackig-lappigen Magneteisenkörner ist teilweise in Leukoxen umgewandelt. Hie und da sieht man vereinzelte Schwefelkies-Körnchen.

Das ziemlich frische Gestein zeigt eine richtungslos-körnige Struktur; da aus der kleinkörnigen, hauptsächlich aus Feldspaten bestehenden mozaikartigen Grundmasse große, xenomorphe Elæolit- und Feldspatindividuen einsprenglingartig sich hervorheben, so erinnert das mikroskopische Bild schon an die porphyrische Struktur mit richtungslos-körniger (mikrogranitischer) Grundmasse.

3. *Nagy-Küriic feje*, östlicher Abhang, ✧ 1246 (Nr. 28). Mittelkörniges, hellrötliches Gestein mit granitischer Struktur; aus dem Feldspat-Nephelin-Gemenge glänzen Biotittafeln vor.

Im Dünnschliff erkennt man viele kleinere und größere, vollständig xenomorphe Mikroklinkörner, die meist eine Gitterstruktur besitzen und dabei stark zerbrochen und gebogen sind.

Gleichfalls reichlich ist der Plagioklas, dessen wasserhelle und oft zwillingslamellierte kleine Körner stellenweise eine undulöse Auslöschung zeigen; Lichtbrechung immer größer als diejenige des Mikroklinfeldspats, $\alpha <$ Balsam $< \gamma$; optischer Charakter positiv; Axenwinkel meist nicht groß, manchmal aber nahezu 90°; ein Schnitt fast senkrecht zu α ergab $\alpha' M = 14\frac{1}{2}°$. Alle diese Eigenschaften sprechen für Albit, bzw. für Albit-oligoklas.

Kleinere und größere xenomorphe Nephelinkörner sind reichlich vorhanden und werden von einem Kranze kleiner Cancrinitkörnchen umgeben, zwischen denen auch Muskovitplättchen erkennbar sind. Übrigens erscheint der Muskovit stellenweise auch als Einschluss im Cancrinit, im Feldspat oder sogar auch in den Erzen. Im Nephelin findet man kleine Cancrinit-, Muskovit-, Biotit- und Erzteilchen. Im Nephelin und in der Umgebung desselben sieht man oft eine schuppige, im durchfallenden Lichte trübe Masse mit ziemlicher Doppelbrechung, stärker lichtbrechend als der Nephelin, aber schwächer als der Cancrinit; das Mineral dürfte höchstwahrscheinlich mit dem

Spreustein identisch sein. Der Cancrinit spielt hauptsächlich eine lückenausfüllende Rolle. Die Menge des Biotit-Lepidomelan ist spärlich; b und c im durchfallenden Lichte fast schwarz.

Die mikroskopische Struktur des Gesteins ist richtungslos-körnig, bzw. ein wenig porphyrartig und führt hinüber in die Mosaik-Mörtelstruktur. Die Mörtelkränze, welche die größere Nephelinindividuen umgeben und deren Gemengteile noch erkennbar sind, bestehen hauptsächlich aus Feldspat, Cancrinit, spärlichem Muskovit und zuletzt aus Spreustein-Häufchen. Das zierliche Bild dieser Struktur verliert an Schönheit vieles dadurch, dass die kernbildende Nepheline verhältnismäßig klein sind.

4. *Várpatak*-Bach, zwischen ✧ 1035 und ✧ 1151 (Nr. 32).

Dieses Gestein wurde schon früher ausführlich beschrieben und auch chemisch analysiert (s. *Neuere Syenittypen von Ditró in Siebenbürgen.* Math. Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. XXIII. 75).

5. Südlicher Abhang des *Bükkfő* (Nr. 38).

Makroskopisch dem vorherigen ähnliches Gestein. Herrschender Feldspat ist der Mikroklin und zwar meist in perthitischer Verwachsung. Der Plagioklas der Mikroperthite zeigt gewöhnlich eine feine, aber noch erkennbare Zwillingsstreifung; oft wird aber die letztere verschwindend fein oder der Feldspat löscht undulös aus. Die Auslöschungsschiefe auf der Fläche (010) beträgt 2—4°, somit ist dieser Plagioklas ein Albitoligoklas; hierauf verweist auch die Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $\lessgtr \gamma'$. Die Mikrokline und Mikroklinperthite bildeten sich nach (010) tafelig aus; man erkennt auch Karlsbader Zwillinge mit der Verwachsungsfläche (010).

Neben der Mikroklinen findet man kleine, wasserreine, xenomorphe Plagioklaskörner, deren Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $\lessgtr \gamma'$; Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben die Auslöschung $\alpha' M = 10 - 10°$ (γ tritt sehr schief aus), senkrecht zu α ergaben die Auslöschung $\alpha' M = 14 - 14°$; somit gehören diese Plagioklase in die Albit- und Oligoklasalbit-Reihe; die unverzwillingten Körnchen sammeln sich oft zu kleinen Haufen.

Der frische Nephelin erscheint in kleineren oder größe-

ren, ja sogar in sehr großen Individuen, die entweder isometrisch ausgebildet sind, oder eine mehr längliche Form haben; die Spaltbarkeit nach $(10\bar{1}0)$ und nach (0001) ist gut erkennbar; stellenweise erkennt man eine beginnende Serizitisierung.

Reichlich erscheint der Cancrinit, dessen xenomorphe Körner entweder die Lücken ausfüllen oder sie umkranzen und durchadern die Nephelinindividuen. Neben den wasserklaren, einheitlich auslöschenden Cancrinitkristallen sieht man auch faserig-rosettenförmige, haufenartige Körner; diese beiden Ausbildungsarten übergehen ineinander.

Die kleinen Sodalitkörnchen durchweben neben dem Cancrinit und Kalkspat das ganze Gestein und füllen sämtliche Lücken desselben aus. Primär ausgebildeten Kalkspat kann man in Form xenomorpher Körner auch in den sonst vollkommen frischen Feldspaten erkennen.

Ein ziemlich häufiger Gemengteil ist der Lepidomelan, welcher xenomorphe Lappen und Fetzen bildet; die größeren Individuen wurden manchmal ein wenig gebogen; Axenwinkel fast 0°; $c : a = 0°$; kräftiger Pleochroismus:

a = sehr hellgelb,
$b = c$ sehr dunkelgraulich- oder grünlichbraun.

Eine häufige und merkwürdige Erscheinung ist die myrmekitartige Verwachsung zwischen Albit und Biotit, wobei der Albit in Biotit eingewachsen sich befindet; neben dem Albit erscheint auch der Kalkspat, welcher sich unbedingt primär erweist, da der Biotit vollkommen frisch erhalten wurde und die beiden Mineralien, Albit und Kalkspat, grenzen sich gegen den Biotit sehr scharf ab. Das letztere Mineral enthält auch spärliche Titaniteinschlüsse, welche stellenweise von einem schwachen pleochroistischen Hofe umgeben sind.

Als farbige Gemengteile erscheinen noch einige näher nicht bestimmbare äußerst kleine grasgrüne Körnchen, die höchstwahrscheinlich zum Aegyrinaugit gehören. Neben denselben sieht man noch einige winzige dunkelgrüne Plättchen, deren schwache Doppelbrechung vielleicht auf Biotit oder auf eine Alkalihornblende verweist.

Die spärlichen mittelgroßen Titanitkristalle bildeten sich oft scharf automorph aus. Als Erze erscheinen einige automorphe Schwefelkieskristalle und sehr vereinzelte xenomorphe Magneteisenkörner, deren Ränder teilweise schon in Leukoxen umgewandelt sind.

Das vollkommen frische Gestein besitzt hypidiomorph-körnige Struktur mit kräftigen Merkmalen der Kataklase.

6. Zahlreiche Gänge am Ostabhang des *Várpatak*-Baches, zwischen ✧ 1009 und ✧ 1068 (Nr. 50).

Makroskopisch ist das Gestein dem vorherigen ähnlich, nur enthält dasselbe spärlichere farbige Gemengteile. Herrschender Feldspat ist der Mikroklin mit Gitterstruktur, dessen kleinere-größere, xenomorph ausgebildete Individuen vollkommen frisch erhalten sind; perthitische Verwachsung mit Albit kann man nur vereinzelt beobachten; stellenweise aber verwächst der Mikroklin parallel mit Albit, wobei die Begrenzungslinien beider Mineralien grob zick-zackförmig verlaufen. Die kleinen Körnchen des reichlichen Plagioklases sind nach dem Albitgesetz zwillingslamelliert; selbst die einzelnen Lamellen sind selten breit, eher werden sie oft so schmal, dass man sie nur bei sehr starker Vergrößerung erkennt. Lichtbrechung derselben: $\alpha <$ Balsam $= \beta$. Orientierte Schnitte ergaben in drei Fällen senkrecht zu γ die Auslöschungsschiefe $\alpha' P = 20°$. Ein Schnitt senkrecht zur Kante (010) (001) ergab $\alpha' M = -11°$ im Kern und $\alpha' M = -6°$ in der zonalen Hülle des Individuums. Diese Auslöschungswinkel zeigen, dass der Plagioklas hauptsächlich in die Albitreihe gehört, die Basizität kann aber noch die Oligoklasreihe erreichen.

Der spärliche xenomorphe Nephelin enthält grünliche stäbchenförmige Einschlüsse, welche der Hauptaxe parallel geordnet sind; stellenweise erkennt man auch Titanit einschlüsse. Sonst ist der Titanit ein häufiger Gemengteil, welcher einerseits in Form größerer, xenomorphen Individuen, anderseits in Gestalt kleiner rundlich-elliptischen Körner im Gestein verstreut sich befindet.

Der spärliche Sodalit füllt teilweise aderförmig die Rissen aus oder erscheint in Form kleiner Körner besonders in der Gesellschaft des Cancrinites in der Umgebung der Nephelin-

individuen. Stellenweise beobachtet man eine schwache Serizitisierung; daneben findet man aber auch guterhaltene Muskovitlamellen und zw. besonders in der Nachbarschaft der mit Sodalit ausgefüllten Rissen; an diesen Stellen beobachtet man eine kräftigere Cancrinitbildung, welche Erscheinung auf eine intensive hydrothermale Wirkung hinweist. Infolge der letzteren entstanden die Mineralien Sodalit, Muskovit und Cancrinit. Dicht vor den hydrothermalen Vorgängen müssten gewisse dynamische Wirkungen stattgefunden haben; dabei entstanden feine Risse, welche während der hydrothermalen Periode mit den erwähnten Mineralien und zw. hauptsächlich mit Sodalit ausgefüllt wurden; somit spielte der Chlorgehalt eine besonders wichtige Rolle.

Die ziemlich häufigen xenomorphen Kalkspatkörner müssen gleichfalls als Bildungen der hydrothermalen Tätigkeit betrachtet werden; die Hauptmenge des Kalkspates befindet sich zwischen denjenigen Berührungsflächen, wo der Zusammenhang der übrigen Gemengteile infolge der dynamischen Tätigkeit gelockert wurde und somit den kohlensäurehältigen Dämpfen und Lösungen freier Raum geschaffen wurde. Gleichfalls dadurch erklärt sich auch die häufige Vereinigung des Kalkspates mit dem Cancrinit.

Biotit zeigt sich häufig in fetzenförmigen Lappen; optisch einaxig; $c : a = \text{cca } 0°$; kräftiger Pleochroismus:

a = sehr hell strohgelb
$b = c$ = schmutzig grünlichbraun.

Einige, äußerst kleine, grünlichblaue Körner konnte man mit voller Sicherheit nicht bestimmen; vermutlich gehören dieselben zu den Alkalihornblenden. Das Magneteisen bildete sich ziemlich reichlich und ziemlich automorph aus; Apatit prismen sind spärlich. Das Gestein zeigt eine für Ganggesteine charakteristische panidiomorph-körnige Struktur; trotzdem ist aber das Gestein kein Schizolit. Auf Grund der mineralogischen Zusammensetzung stellt dieses Gestein einen Übergangstypus zu den Alkalisyeniten dar.

7. *Várpatak*-Bach, Gänge an dem östlichen Abhang zwischen ✧ 1009 und ✧ 1068 (Nr. 51).

Äußerlich dem vorherbeschriebenen Gestein vollkommen ähnlich. Als herrschender Feldspat erscheint der reichliche Mikroklin in xenomorphen kleinen Körnchen mit Gitterstruktur; die größeren Individuen zeigen oft eine dichte perthitische Verwachsung, deren Plagioklasspindeln in die Albitreihe gehören, da die Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $> \gamma'$. Neben dem Mikroklin erkennt man reichliche kleinere und größere Plagioklaskörner, die oft nur trübe durchsichtig sind und keine geradlienige Konturen besitzen; die Auslöschung wird öfters undulierend; die Albitzwillingslamellierung ist sehr fein und dicht; oft keilen sich die Zwillingslamellen aus oder sie werden schwach gebogen. Periklinzwillinge sind selten zu finden. Man erkennt auch Körner ohne jede Zwillingsstreifung. Optische Eigenschaften der Plagioklaskörner: Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $= \beta$, Schnitte senkrecht zur Kante (010) (001) ergaben $\alpha' M = 12°$, 8—8°, Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 13\frac{1}{2}°$, 14°, $12\frac{1}{2}°$; somit gehört der Plagioklas in die Albit-, bzw. Oligoklasalbit-Reihe.

Nephelin erscheint in diesem Gestein viel reichlicher, als in dem vorherbeschriebenen; die wechselnd großen, abgerundeten Individuen erlitten eine kräftigere Serizitisierung und eine schwächere Cancrinitisierung. Die xenomorphen Cancrinitkörner erscheinen nur in kleiner Menge und nur in der Nachbarschaft der Nephelinindividuen.

Höchst auffallend ist in diesem Gestein die Rolle des Sodalites, welcher in Form kleiner Adern das ganze Gestein durchwebt. Diese Sodalitadern treten an den Grenzlinien der Gemengteile und zwar besonders am Saum der Nephelinindividuen auf, manchmal aber durchqueren sie selbst die Gemengteile. Diese Erscheinungsart des Sodalitminerals wirft Licht über die Bildungsweise einzelner Gemengteile. Nach der Intrusion erlitt der schon verfestigte und auskristallisierte Gesteinsstock dislozierende Störungen, infolge deren einerseits die in der Einleitung erwähnten gewöhnlichen Druckerscheinungen entstanden, anderseits aber war die Möglichkeit vorhanden, dass auf dem Wege der Spaltrissen, die bei dieser Gelegenheit entstanden, die Mineralisatoren in das ganze Gestein hineindringen und ihre metamorphosierende Wirkungen ausüben. In dieser Periode

bildeten sich die Mineralien Sodalit, Muskovit, Cancrinit und der primäre Kalkspat. Der Sodalitsaum der Gemengteile wäre auch als Ausfüllung einfacher Kontraktionsspalten zu erklären, aber die übrigen Erscheinungen sprechen dafür, daß infolge der dynamischen Wirkungen der feste Zusammenhang der Gemengteile gelockert und somit den eindringenden Mineralisatoren Raum geschaffen wurde. Auf Grund dieser Beobachtungen kann man feststellen, dass die tektonischen Störungen, durch welche die bekannten mechanischen Erscheinungen der Gesteinsstruktur hervorgerufen wurden, in der hydrothermalen Periode wirksam waren. Wir werden später noch Gelegenheit haben, um auf diejenigen übrigen Erscheinungen hinweisen zu können, durch welche unsere Auffassung unterstützt wird.

Die spärlichen Titanitkörner bildeten sich xenomorph aus; mitunter sind sie Zwillinge und enthalten Erzeinschlüsse. Infolge seiner kleinen Dimensionen war ein Gemengteil nicht näher bestimmbar; derselbe bildet winzige, rundliche Körnchen von brauner Farbe, die sich isotrop benehmen und mitunter einschlußartig im Titanit erscheinen. Sehr spärlich sind die grünlichen Biotitfetzen, deren optischer Axenwinkel fast 0° ist; $c : a$ = cca. 0°; kräftiger Pleochroismus:

a = sehr hell strohgelb,
b = c = dunkel bräunlichgrün.

Magneteisen erscheint ziemlich reichlich in Form xenomorpher Körner; letztere zeigen stellenweise schwache Leukoxenbildung und werden gleichzeitig mit epidotartigen Häufchen umgeben. In den Feldspaten erkennt man mitunter Kalkspatkörnchen. Die Struktur des Gesteins übermittelt von der hypidiomorph-körnigen zu der panidiomorph-körnigen Struktur; die Korngröeß ist überhaupt nicht gleichmäßig; größere und kleinere Feldspate bzw. Nepheline wechseln sich miteinander ab.

8. *Kuppe Csanód feje* (Nr. 78).

Das graue bzw. rötliche kleinkörnige Gestein besitzt granitartigen Habitus, doch wird die Struktur meist ein wenig porphyrartig.

Größere, einsprenglingartig sich hervorhebende Mikroklinperthite mit Gitterstruktur bilden den herrschenden Feldspat; die Individuen bildeten sich nach (010) tafelig aus und sind nach der Brachyaxe verlängert. Der Plagioklas der Perthite gehört zum Albit, da die Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $> \gamma'$ ist. Die perthitische Verwachsung und die Zwillingslamellierung werden oft verschwindend fein. Neben den grobkörnigen Perthiten findet man in der Grundmasse reichlich kleine, xenomorphe Mikrokline, welche von einem xenomorphen und gleichfalls kleinkörnigen Plagioklas begleitet werden. Letzterer zeigt sehr dichte Zwillingsstreifung, wobei die einzelnen Lamellen oft sich auskeilen; die Auslöschung wird undulös. Selten sieht man die Zwillingsstreifung nach dem Periklingesetz. Optisches Verhalten der Plagioklasindividuen: Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $< \gamma'$, Schnitte senkrecht zur Kante (010) (001) ergaben $\alpha' M = 9 - 10°$, Schnitte senkrecht zur Kante (010) (001) ergaben $\alpha' M = 2°$ (in einem Teil des Krist.), Schnitte senkrecht zur Kante (010) (001) ergaben $\alpha' M = 11 - 11°$ (im andern des Krist.), Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 20°$; auf Grund dieser optischen Konstanten gehören die Plagioklase in die Albit-, Oligoklasalbit-, bzw. Oligoklasreihe.

Die reichlichen Nephelinkörner sind klein und abgerundet; im Längsschnitt sieht man oft parallelepipedische Formen. Meist werden die einzelnen Körner von einem zierlichen Cancrinitkranz umgeben, in welchem Kalkspat und Serizit, ja sogar größere Muskovitlamellen gleichfalls vorhanden sind. Selbst der Nephelin lässt schwache Cancrinitisierung und längst den Adern Serizitisierung erkennen. Serizitische Häufchen erscheinen in den Feldspaten und auch sonst im ganzen Gestein verstreut. Häufig sind die zwillingslamellierten Kalkspatkörner, welche im Cancrinit oft Einschlüsse bilden; selbst der Cancrinit ist immer xenomorph. Der Sodalit spielt eine ähnliche Rolle wie in den vorherbeschriebenen Gesteinen; der Biotit besitzt gleichfalls dieselben Eigenschaften, wobei die Titaniteinschlüsse desselben oft pleochroistische Höfe zeigen. Der ziemlich häufige Titanit bildet einerseits größere, automorphe Kristalle, anderseits rhombenförmige, oder elliptisch-

runde Körner; oft wird derselbe von Magneteisen umgürtelt. Letzteres Mineral ist in Form kleiner, xenomorpher Körner überall im Gestein zerstreut. Mit dem Magneteisen kann Schwefelkies verwachsen sein. Der Apatit bildet kleine Prismen und Körner. Näher nicht bestimmbar war ein Häufchen, bestehend aus xenomorphen, rundlichen Körnchen von starker Lichtbrechung ($n = 1{\cdot}8 - 1{\cdot}9$) und kräftiger Doppelbrechung; wir vermuten in demselben entweder Zirkon oder optisch anomalen Granat. Die Struktur des Gesteins ist infolge der grossen Mikrolin- und Feldspatindividuen porphyrartig; die mozaikartige Grundmasse zeigt Spuren der Kataklase.

9. *Várpatak*-Bach, östlicher Abhang, gegenüber ✧ 1035 (Nr. 87).

Granitartiges, sehr hellgefärbtes Gestein. Der reichliche Mikroklin bildet kleinere-größere, xenomorphe Körner mit Gitterstruktur und albitperthitischer Verwachsung. Sehr reichlich erscheint der Albit in Form kleiner Körner; derselbe zeigt meistens sehr dichte und feine Zwillingsstreifung; Auslöschung oft undulös; die optischen Konstanten sind: Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $= \gamma'$;

Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 19°$,
« « « α » $\alpha' M = 14°$.

Der Nephelin bildet spärliche, aber große und ziemlich isometrische Körner, die vollkommen frisch oder nur ein wenig serizitisiert sind; sie werden von xenomorphen Cancrinitindividuen umkranzt und durchgewachsen. Die reichlichen Körner des letzteren bilden gleichzeitig mosaikartige Haufen. Die großen Blätter des lepidomelanartigen, braunen Glimmers vereinigen sich zu größeren Haufen; die Eigenschaften stimmen mit denen im vorherbeschriebenen Gestein überein; allgemein sind dieselben frisch, nur an einzelnen Stellen bemerkt man eine schwache Verwitterung. Sodalit erscheint nur spärlicher, das Mineral füllt die Lücken des Gesteins aus. Die Menge des Magneteisens ist verschwindend wenig. In dem sonst hypidiomorph-körnigen Gestein bilden die cancrinitreichen Teile mosaikartige Haufen.

10. Zusammenfluss der Bäche *Várpatak* und *Részepatak* (Nr. 105).

Da in diesem feinkörnigen, graulichen Gestein schon Aegyrin erscheint, so bildet dasselbe den Übergang zu den Aegyrinsyeniten. Die reichlichen Mikroklinindividuen sind von verschiedener Größe; die kleinen Körner bildeten sich xenomorph, bzw. isometrisch aus, die größeren sind tafelförmig nach (010) und dabei nach der Brachyaxe verlängert; allgemein wurden sie vollkommen frisch erhalten. Die größeren Individuen zeigen öfters die perthitische Verwachsung mit fein lamellierten Albitspindeln. Karlsbader Zwillinge kann man selten erkennen. Herrschender Feldspat ist der Albit; derselbe bildet kleinere und größere, xenomorphe Körner; die Albitzwillingsverwachsung ist allgemein verbreitet, wobei die einzelnen Lamellen von sehr verschiedener Feinheit sind. Periklinzwillingslamellen kann man nur selten beobachten. Das optische Verhalten verweist auf reinen Albit; Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $\gtrless \beta$ und Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 15°$ (gemessen in drei Fällen), Schnitte senkrecht zur Kante (010) (001) $\alpha' M = 14°$ (im Mikroklinantiperthit).

Reichlich findet man die kleineren und größeren Nephelinkörner, die oft kräftig serizitisiert sind; der Serizit kann eisblumenförmige Wachstumsformen aufnehmen. Rings um die Nephelinindividuen erscheinen mosaikartig die rundlichen, xenomorphen Cancrinitkörner, oder die letzteren bildeten sich gegenüber dem Nephelin faserig aus. Im Cancrinit findet man spärlich Sodalitkörner. Die Menge der Aegyrinfetzen ist nicht bedeutend; oft zeigen dieselben eine isomorphe Schichtung, wobei der Kern die grasgrüne und gelbe pleochroistische Farben des Aegyrins zeigt, während der Saum der Individuen in den Absorptionsfarben keinen auffallenden Unterschied erkennen läßt und ständig bräunlichgelb erscheint; diese Farbe zeigt sich sogar in der γ-Richtung des grünen Kernes. Man findet auch solche Aegyrinkörner, die überhaupt keinen grünen Kern erkennen lassen; daß diese Körner dennoch Aegyrine sind, wird durch alle übrigen optischen Eigenschaften bewiesen: Doppelbrechung dem Aegyrin gleich kräftig, Hauptzone optisch

negativ, Auslöschung fast gerade, etc. Die isomorph geschichteten Aegyrine ergaben in

Schnitten senkrecht zu β $ac = 7—8°$ im grünen Kern,
$ac = 3—4°$ in der gelben Hülle.

In den gelblichen Körnchen vermindert sich der Auslöschungswinkel bis zu 2°; die grasgrünen Individuen zeigen einen kräftigen Pleochroismus:

a = dunkel grasgrün,
b = lebhaft grasgrün,
c = bräunlichgrün;

Schliffe senkrecht zu β ergaben die Interferenzfarbe grün II-ter Ordnung; Axenebene parallel (010), optischer Charakter negativ.

Spärlich sieht man die sehr kleinen Biotithäufchen; $c : a$ = nahezu 0°; der Pleochroismus ist kräftig

a = sehr hell strohgelb,
b = c dunkelgrün oder dunkel schmutzigbraun.

Äußerst spärlich findet man einzelne Hornblendekörnchen mit gut erkennbarem Pleochroismus in dunkelgrünen und graulichbraunen Farben. Hie und da verstreut erkennt man kleine rundliche oder rhombenförmige Titanitkörnchen. Farblose oder gelbliche Epidotindividuen sind äußerst spärlich; der Apatit ist gleichfalls ein seltener Nebengemengteil. Die xenomorphen Magneteisenkörner besitzen sehr verschiedene Dimensionen und zeigen stellenweise die Leukoxenbildung. Die fuchsrot durchscheinenden und kräftig doppelbrechenden Erzkörner gehören sicherlich zum Hämatit. Die Gesteinsstruktur ist typisch hypidiomorph-körnig.

11. Nordwestlicher Abhang des *Farkas sarka*, an der Straße zur Kuppe *Piricske* (Nr. 114).

Mittelkörniges, grauliches Gestein. Herrschender Feldspat ist der Mikroklin, dessen kleinere Individuen xenomorph, die größeren aber nach (010) dicktafelig ausgebildet sind; Karlsbader Zwillinge und perthitische Verwachsungen erkennt man häufig; der Albit der Perthite ist entweder äußerst fein zwillings-

lamelliert oder zeigt überhaupt keine Zwillingslamellen; selbst die perthitische Verwachsung ist bald feiner, bald grober; Anthiperthite sind gleichfalls erkennbar; die Perthit-Albite ergaben in Schliffen $\parallel 010$ $a'P = 20°$. Die kleinen, xenomorphen Plagioklaskörner sind oft zerbrochen und zeigen undulöse Auslöschung; die Albitzwillingslamellierung ist allgemein sehr fein, die Lamellen sind ein wenig gebogen; die optischen Eigenschaften sind: Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $= \gamma$, Schnitte senkrecht zu α ergaben $a'M = 12°$ und $15°$, Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) $a'M = 13°$ und $13°$; diese Konstanten weisen auf Albit und Albitoligoklas.

Die reichlichen großen Nephelinkörner sind entweder xenomorph rundlich oder oblongenförmig gestaltet; sie zeigen oft eine weit vorgeschrittene Serizitisierung und enthalten Einschlüße von Cancrinit, Serizit, ja sogar große Muskovitblätter. Die Risse, welche die Nepheline durchqueren, wurden größtenteils mit Cancrinit ausgefüllt; anderseits umhüllen reichliche Cancrinitkörner die Nephelinindividuen; dieser Cancrinit ist entweder von faseriger Struktur, wobei die Fasern auf die Nepheline senkrecht gerichtet sind, oder der Cancrinit bildet rundlich xenomorphe Körner. In dieser Cancrinithülle kann man gleichfalls reichlich große Muskovitblätter erkennen; oft wurde in der Cancrinit-Muskovitzone der Nephelin eben nur spurenweise erhalten. Hier erscheint, obzwar spärlicher, der lückenausfüllende Sodalit, der aber stellenweise auch größere Körner bildet. Die feinen Risse der Mikrokline werden gleichfalls mit Sodalit, oder mit Cancrinit zementiert. Die spärlichen bräunlichgrünen Biotitfetzen bilden parallele Verwachsungen mit dem Muskovit; sie werden besonders in den cancrinitisierten Zonen von Erzen begleitet. Sonstige Gemengteile sind: spärliche, große, xenomorphe Magneteisenindividuen; die kleineren Körner dieses Minerals begleiten hauptsächlich den Glimmer; das Mineral ist einerseits verrostet, anderseits besitzt dasselbe eine durchlöcherte Gitterstruktur mit Spuren von Leukoxen und Epidot. Vereinzelt sieht man Schwefelkieskörnchen, Apatit- und Zirkonkriställchen. Das Gestein enthält noch bräunlichgelbe, stark lichtbrechende,

isotrope Körnchen von quadratischem Durchschnitt, die aber infolge ihrer winzigen Dimensionen nicht bestimmbar waren. Die Struktur des Gesteins beweist eine kräftige Zermalmung; die ursprüngliche Struktur kann die hypidiomorph-körnige gewesen sein; in der jetzigen Ausbildungsweise muß dieselbe — infolge der tiefgreifenden Umwandlung des Nephelins und infolge der Kataklasphänome — als Mörtelstruktur bezeichnet werden. Auffallend spärlich enthält das Gestein farbige Gemengteile, wodurch der Charakter ausgesprochen leukokrat wird.

12. *Csobothegy*-Berg, östlich von ✧ 1099 (Nr. 115).

Kleinkörniges, granitähnliches Gestein. Die Gemengteile sind: Mikroklin und Mikroklinperthit mit den bekannten Eigenschaften. Die Plagioklaskörner zeigen oft auffallend spitzig gezahnte Konturen; die Zwillingslamellierung ist wechselnd fein, die Lamellen keilen sich aus oder sie werden gebogen; Periklinzwillinge sind gleichfalls zu erkennen; eine Zertrümmerung der Individuen ist oft bemerkbar; das optische Verhalten ergab: Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $= \beta$.

Schnitte senkrecht zu α $\alpha' M = 15{\cdot}5°$, 12°, 13°, 14°,
« « zur Kante (010) (001) $\alpha' M = 15 - 15°$,
« « zu γ $\alpha' P = 17°$,

somit gehört der Plagioklas in die Albit- oder Albitoligoklasreihe.

Der reichliche Nephelin ist frisch, xenomorph und kleinkörnig, mit den Kennzeichen der Zermalmung; die Risse wurden mit Cancrinit ausgefüllt. Der spärliche Biotit zeigt sich nur in Fetzen. Der Cancrinit füllt einerseits die Spaltrissen aus, anderseits umgürtelt derselbe hauptsächlich die Nephelinindividuen in Form einzelner Körner und stengeliger Rosetten und Sphärolithen. Die kleinen und abgerundeten Körner des Titanites zeigen sich im ganzen Gestein spärlich aber gleichmässig verstreut. Hie und da erkennt man Spuren von Kalkspat, einige winzige Zirkonkriställchen und schöne Apatitprismen mit hexagonalem Durchschnitt. Die Erzkörnchen verwachsen mit Biotit, oder sie bilden Einschlüsse im Titanit; das Magneteisen läßt stellenweise die quadratischen oder sechs-

eckigen Durchschnitte erkennen. Die Struktur ist hypidiomorph-kleinkörnig, bzw. porphyrartig.

13. *Nagy-Kürücpatak*-Bach, grobkörniges Gestein am rechten Ufer im oberen Steinbruch (Nr. 117).

Hellgefärbtes, sehr grobkörniges Gestein; die schwärzlichen Biotithaufen heben sich stark hervor. Die reichlichen Mikrokline und Mikroklinperthite haben tafelartigen Habitus nach (010). Die feinen Plagioklaskörner mit zackig gezahnten Konturlinien bilden eine Art Grundmasse: die Zwillingslamellierung der einzelnen Körner zeigt eine sehr wechselnde Ausbildung. Die optischen Eigenschaften derselben sind: Lichtbrechung $\beta <$ Balsam $< \gamma$ und Schnitte senkrecht zu a ergaben $a'M = 15°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $a'P = 20°$, 17°, 15°, 19°, 13°, Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $a'M = 11°$; somit gehört der Plagioklas in die Albit-, bzw. Albitoligoklasreihe.

Die reichlichen, großen, xenomorphen Nephelinkörner befinden sich in einem auffallenden Umwandlungsstadium; Risse durchadern und greifen in die Nephelinindividuen hinein; diese Adern wurden mit Muskovitschuppen, kleinen Cancrinitkörnchen und Sodalitteilchen besetzt; selbst der Nephelin wird mit reichlichem Cancrinit umgürtelt. Letzterer bildet einerseits einheitliche Körner, anderseits stengelige Haufen, wobei die Hauptaxe des Stengels senkrecht zu den Nephelinen gestellt wurde; das mikroskopische Bild dieser Haufen erinnert an die Kelyphite. Im Cancrinitgürtel kann man noch verstreute Muskovitschuppen und lückenausfüllende Sodalitteile erkennen. Im Dünnschliff erscheinen die Cancrinithaufen oft als Einschlüsse der Nephelinindividuen. Der Kalkspat spielt in diesem Gestein eine wichtigere Rolle. Kalkspatbildung kann man an verschiedenen Stellen des Gesteins beobachten; das Mineral erscheint zwischen den Feldspatindividuen, selbst drinnen in den Feldspaten, sowie in der Gesellschaft der Biotitlamellen und in den Gesteinsrissen. Der Kalkspat zeigt deutliche Zwillingslamellierung und infolge der dynamischen Wirkungen optische Zweiaxigkeit. Das Mineral ist hier sicher kein Verwitterungsprodukt, da das Gestein vollkommen frisch erhalten wurde. Eher

bildete sich dieser Gemengteil während der hydrothermalen Periode aus dem Kalkgehalt der Feldspate und zwar infolge der Einwirkung der Kohlensäure.

Der Biotit bildet fetzenförmige Haufen; optischer Axenwinkel cca 0°; $c : a$ = cca 0°; kräftiger Pleochroismus:

a = strohgelb,
b = c = sehr dunkel schmutzig grünlichbraun oder grünlich.

Der Glimmer enthält opake Erz einschlüsse. In den Nephelinindividuen sieht man reichliche äusserst kleine Biotitschuppen, die grösstenteils den Spaltflächen parallel geordnet sind. Das Magneteisen erscheint einerseits in Form kleiner Körner vom quadratischem Durchschnitt, anderseits bildet dasselbe größere, xenomorphe Körner, die sich besonders in den Biotithaufen und deren Umgebung sich ansammeln. Hie und da findet man einzelne Zirkonkriställchen. Die Gesteinsstruktur zeigt gewisse charakteristische Züge: die Grundmasse is fast panidiomorph und besteht aus kleinen Mikroklin-, Cancrinit-, Albit- und Sodalitkörnchen; aus dieser Grundmasse heben sich die großen Mikroklinkörner und die noch größeren Nephelinindividuen einsprenglingartig hervor.

II. Hornblende-Biotit-Nephelinsyenite.

1. Berggrat des *Várbükk*, südwestlich von ✧ 1297 (Nr. 14).

Mittelkörniges, graues Gestein; Struktur ein wenig schieferig. Neben den kleinen, xenomorphen Mikroklinen mit Gitterstruktur erscheinen große, tafelige Mikroklinperthite, deren Schliffe parallel (010) ergaben

$a'P = 5°$ (Mikroklin),
$a'P = 19°$ (γ tritt schief aus; Albit).

Der Plagioklas einer andern perthitischen Verwachsung ergab im Schnitte senkrecht zu γ $a'P = 12°$ im Kern und 20—21° in der äußeren Hülle des Kristalls; somit gehört der Kern der zonalen Plagioklase zum Oligoklasalbit, während die äußere Hülle aus Albit besteht. Der Mikroklin wird von reichlichem

Plagioklas begleitet, dessen wasserklare, kleine, xenomorphe Körner verschieden dicht zwillingslamelliert sind; optisches Verhalten derselben: Lichtbrechung $\alpha' \leqq$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001)(010) ergaben $\alpha' M = 14 - 14°$, Schnitte senkrecht zu a ergaben $\alpha' M = 15 - 15{\cdot}5 - 16°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 18°$; maximale Auslöschung in der symmetrischen Zone $15 - 15°$; letztere Schnitte sind fast senkrecht zu a; diese Werte, sowie die Wahrscheinlichkeitsmethode von Viola weisen auf Albit, dessen Individuen meist schwach zonar gebaut sind. Die reichlichen Nephelinkörner zeigen beginnende Serizitisierung, bzw. Umwandlung in schuppige Spreusteinhaufen (optisch negativ, einaxig; niedrige Interferenzfarben); diese Umwandlungsprodukte erscheinen oft als eisblumen- oder fächerförmige Wachstumsformen; das Axenbild der Nephelinindividuen ist verschwommen, bzw. der Nephelin zeigt sich ein wenig zweiaxig. Der kleinkörnige Cancrinit bildet einerseits Einschlüsse im Nephelin, anderseits umgürtelt das Mineral den letzteren. Die Hornblende bildet reichliche, winzige, xenomorphe Fetzen; nur hie und da erkennt man die Formen $\{110\}$ und $\{010\}$ ein wenig schärfer ausgebildet; Spaltbarkeit nach (110) vollkommen, seltene Zwillingsbildung nach (100); optischer Axenwinkel sehr klein, im Maximum $20 - 25°$, oft fast $0°$; Axenebene senkrecht zu (010); optischer Charakter negativ; kräftige Axendispersion $\upsilon > \rho$ und gleichfalls kräftige Bisektrizendispersion, $c : \mathfrak{b} = 23 - 25°$; Doppelbrechung sehr schwach; Pleochroismus kräftig $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}$ = sehr dunkel bräunlichgrün oder grünlichbraun,
$\mathfrak{b}$ = dunkel bläulichgrün,
$\mathfrak{a}$ = bräunlichgelb.

Der fetzenförmige Biotit verwächst oft mit Hornblende und zeigt die bekannten optischen Eigenschaften. Der Titanit bildet einerseits größere, automorphe Kristalle, anderseits findet man die kleinen, xenomorphen Körner hauptsächlich in der Nachbarschaft der Biotit-Hornblende-Erzhaufen verstreut. Der spärliche Sodalit ist im Nephelin eingewachsen; der Kalkspat wurde in der Nachbarschaft der farbigen Gemengteile

aufgehäuft; der Apatit bildet kleine Prismen; Magneteisen ist spärlich verstreut. Fraglich ist die Herkunft derjenigen Erzhaufen, die an den Begrenzungsflächen der farbigen Gemengteilen und besonders in den Spaltrissen der Biotitlamellen meist in Form kleiner Körner sich ausscheiden; die perlenförmig geordneten Körnchen zeigen oft eine beginnende Verrostung. Die Hornblende enthält bedeutend weniger Erzeinschlüsse, als der Biotit. Äußerst kleine, gelbliche Körner, sechs- oder vierseitig, sehr kräftig lichtbrechend, optisch isotrop, in ihren mittleren Teilen gelblichbraun durchsichtig, sind wahrscheinlich zu einem titanreichen, melanitartigen Granat zu rechnen. Die Gesteinsstruktur ist hypidiomorph-körnig, nähert sich aber infolge einiger grossgewachsenen Mikroklin- und Nephelinindividuen der porphyrartigen; mittlere Korngrösse.

2. Steinbruch im *Nagy-Kürücpatak*-Tal (Nr. 18).

Aus dem kleinkörnigen, grauen Gestein heben sich größere Mikroklintafeln heraus, die nach dem Karlsbader Gesetz oft Zwillinge bilden; Verwachsungsfläche der letzteren (010), selten (100). Bavenoer Zwillinge findet man spärlich; die beiden Individuen greifen mit unregelmässigen Flächen ineinander. Parallel der Fläche (010) ergab eine perthitische Verwachsung

$a'P = 19°$ _ _ _ _ _ _ Albit,
$a'P = 5°$ _ _ _ _ _ _ Mikroklin.

Der meist zwillingslamellierte Plagioklas gehört in die Albit- und Oligoklasalbit-Reihe; optisches Verhalten desselben: Lichtbrechung $a' <$ Balsam $\gtrless \gamma'$, Schnitte senkrecht zu a ergaben $a'M = 15°$, Schnitte senkrecht zur Kante (010)(001) $a'M = 9-9°$, $14-14°$, $14-14°$.

Der Nephelin wurde frisch erhalten; die teilweise automorphen Kristalle zeigen auffallend gute prismatische Spaltbarkeit; parallel der Hauptaxe enthält das Mineral eine Unmenge von winzigen stäbchenförmigen Einschlüssen.

Die spärliche Hornblende bildet meist nur einzelne Fetzen; selten erkennt man das Prisma $\{110\}$; optischer Axenwinkel klein; Axenebene senkrecht zu (010); optischer Charakter

negativ; kräftige Bisektrizendispersion; Doppelbrechung sehr schwach; $c : \mathfrak{b} =$ cca 17°; kräftiger Pleochroismus:

$\mathfrak{c}$ = dunkel grünlichbraun,
$\mathfrak{b}$ = dunkel bläulichgrün,
$\mathfrak{a}$ = gelblich, bzw. ein wenig bräunlich.

Die spärlichen Cancrinitkörner umhüllen die Nephelinindividuen; der grünlichbraune Biotit bildet nur kleine Fetzen. Die größeren Titanitkörner sind meist Zwillinge nach der Basis; die elliptisch-rhombenförmigen, kleineren Körner findet man überall im Gestein gleichmässig verstreut. Kalkspat erscheint im Feldspat und in den Cancrinithaufen; an der letzteren Stelle findet sich auch der Sodalit. Das Magneteisen bildete sich teilweise automorph aus und zeigt öfters eine beginnende Leukoxenbildung. Der Apatit spielt eine sehr untergeordnete Rolle. Die Struktur ist hypidiomorph-körnig; aus der feinkörnigen Gesteinsmasse heben sich nur einige größere Mikrokline und Nepheline einsprenglingartig hervor.

3. Kuppe *Farkas-patak tető*; 30 cm mächtiger Gang westsüdwestlich von ✧ 1091 (Nr. 22).

Feinkörniges, dunkelgraues Gestein. Der reichliche, wasserklare Mikroklin wird von gleichfalls wasserklarem Plagioklas begleitet, welcher der Albit- und Oligoklasalbit-Reihe angehört. Optisches Verhalten des letzteren: Lichtbrechung $\alpha' \leqq$ Balsam $\leqq \gamma'$ und Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 19{\cdot}5°$, 14°, 18°, 12·5, Schnitte senkrecht zur Kante (010) (001) ergaben $\alpha' M = 12 - 12°$, $10 - 10°$.

Die reichliche Hornblende bildet meist kleine Fetzen; Zwillinge nach (100) sind häufig; Zonarstruktur sehr auffallend; Pleochroismus kräftig:

$\mathfrak{a}$ = sehr hell grünlichgelb,
$\mathfrak{b}$ = dunkel bräunlichgrün,
$\mathfrak{c}$ = bläulichgrün in der Hülle, bräunlich im Kern;

im Kern der Kristalle $c : \mathfrak{c} = 17°$, in der Hülle $c : \mathfrak{c} = 25°$; sehr kräftige Bisektrizendispersion $c : \mathfrak{c}_\varrho > c : \mathfrak{c}_v$; Axenwinkel klein; Axenebene parallel (010); Axendispersion schwach; Doppelbrechung gleichfalls schwach; optischer Charakter negativ. Bio-

titfetzen erkennt man nur spärlich. Nur als ein sehr seltener Gemengteil erscheint der Aegyrinaugit in Form kleiner, xenomorphen Fetzen: Doppelbrechung cca 0·025; $c : a = 32-35°$; optisch positiv; Axenwinkel groß; Pleochroismus: a = grasgrün, c = grünlichgelb. Nephelin und Cancrinit spielen eine nur untergeordnete Rolle; aus dem Nephelin entstanden die Serizit- und Spreusteinhaufen; oft ist der Nephelin schon vollständig verschwunden, aber gleichzeitig entstand der Cancrinit; es ist deutlich sichtbar, daß dabei nicht gewöhnliche Verwitterungsvorgänge, sondern durch pneumatolytische Agentien hervorgerufene Umwandlungen wirksam waren. Das Gestein enthält verhältnismäßig viel Schwefelkies und Apatit. Die panidiomorph-kleinkörnige Struktur des Gesteins erinnert an die Pflasterstruktur. Da der Erhaltungszustand vollkommen frisch ist und nicht einmal die Spuren der Verwitterung oder der Verrostung bemerkbar sind, so liegt die Wahrscheinlichkeit sehr nahe, daß auch der Schwefelkies zu den primären Gemengteilen gehört. Auf Grund der Struktur könnte man das Gestein als Hornblendemikrolithen enthaltenden Nephelinsyenit bezeichnen.

4. *Várpatak*-Bach, an der Ostseite bei ✧ 1035 (Nr 31).

Kleinkörniges, graues Gestein mit großgewachsenen Mikroklin- und Hornblendeindividuen. Mikroklin und Plagioklas bilden die Grundmasse; letzterer gehört zum Albit, da $\alpha <$ Balsam $< \gamma$ und Schnitte senkrecht zur Kante (010) (001) ergaben $\alpha' M = 13·5 - 13·5°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 20°$.

Der Nephelin wurde größtenteils serizitisiert oder kaolinisiert; reichliche Cancrinit- und Sodalitkörner bilden eine warhaftige Mosaik. Die spärliche Hornblende erscheint meist in Fetzen, nur hie und da findet man größere Prismen, welche die Form $\{110\}$ erkennen lassen; die optischen Eigenschaften sind wegen der Ausbildungsweise der Kristalle nur teilweise bestimmbar:

$b = a$, Hauptzone positiv; der Pleochroismus:
a = dunkel grünlichbraun, fast opak,
b = bräunlichgelb,
c = dunkel grünlichblau;

Doppelbrechung sehr schwach; Bisektrizendispersion äußerst kräftig; alle diese Eigenschaften charakterisieren die natronhaltigen Hornblendemineralien. Aegyrinkörner sind nur sehr spärlich erkennbar. Die seltenen Biotitblätter verwachsen öfters mit der Hornblende, deren Prismenkanten der Basisfläche des Glimmers parallel laufen. Das Gestein ist mit Titanitkörner gleichmässig bestreut. Spärlich erscheint das Magneteisen und der Apatit; einige gelblich gefärbte Granatkörner kann man gleichfalls erkennen. Die Struktur bildet einen Übergang von der holokristallinen zur panidiomorph-körnigen, bzw. zur porphyrartigen, da einige Mikroklin- und Hornblendeindividuen aus der Gesteinsmasse sich einsprenglingartig hervorheben.

5. Graue Gänge im roten Syenit in der Nachbarschaft der Mündungen der Bäche *Angi patak útja* und *Beret patak útja* (Nr. 46).

Graues, kleinkörniges Gestein, ein wenig schieferig gestaltet. Neben einzelnen großgewachsenen, trüben Mikroklinperthiten besteht die Hauptmasse des Gesteins aus kleinen, frischerhaltenen Mikroklin- und Plagioklaskörnern; letztere zeigen stellenweise undulöse, bzw. zonare Auslöschung; die optischen Eigenschaften weisen auf Albit, bzw. Oligoklasalbit: Schnitte senkrecht zur Kante (010) (001) ergaben $a'M = 12{\cdot}5—12{\cdot}5°$, $12—12°$, $11°$, Schnitte senkrecht zu a ergaben $a'M = 8°$ und $12°$ (zonar), Schnitte senkrecht zu γ ergaben $a'P = 10°$, Schnitte parallel (010) ergaben $a'P = 19°$.

Die spärlichen, aber großgewachsenen Nephelinindividuen sind durch Serizitisierung und Cancrinitisierung charakterisiert; die abgerundeten Körner wurden mit einem Kranze umgürtelt, welcher aus Cancrinit, Serizit, Kalkspat und spärlichem Sodalit besteht; die Risse der Nepheline wurden dabei hauptsächlich mit Sodalit und untergeordnet mit Cancrinit ausgefüllt. Der reichliche Cancrinit entstand allgemein auf Kosten des Nephelins und bildet häufig radialstengelige Rosetten. Die Biotitfetzen sind reihenförmig geordnet, inmitten deren erkennt man einige Hornblendefetzen; letztere gehören in die Reihe der Alkalihornblenden; infolge der Ausbildungsweise der Individuen lassen sich die Eigenschaften nicht

näher bestimmen: Axenebene senkrecht zu (010), a liegt in der Nähe der Klinoaxe, $b = c$; die Absorption $c > b$, der Pleochroismus:

c = sehr dunkel grünlichbraun,
b = dunkel bläulichgrün;

Axenfarbe von a heller als diejenige von b, aber wegen Mangel an entsprechender Schnitte nicht näher bestimmbar; Doppelbrechung schwach; optischer Axenwinkel sehr klein. Titanit ist reichlich vorhanden; Apatit ziemlich verbreitet; Magneteisen und Schwefelkies sehr spärlich. Struktur panidiomorphkörnig, bzw. porphyrartig; Mikroklin- und Nephelinindividuen bilden die Einsprenglinge.

6. Nördlich von der Kuppe *Várbükk feje*, ✧ 1499 (Nr 99).

Mittelkörniges, grauliches Gestein. Der reichliche Mikroklinperthit wird von dem gleichfalls reichlichen, frischen Albit begleitet; die Zwillingslamellierung des letzteren wird bis zur Unkenntlichkeit dicht, bzw. fehlt fleckenweise vollkommen; die Auslöschung kann undulös werden. Lichtbrechung des Plagioklases in den Perthiten $\alpha <$ Balsam $= \beta$, d. h. Albit, in den selbstständigen Plagioklaskörnern $\alpha' <$ Balsam $\lessgtr \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 12-12°$, Schnitte senkrecht zu α $\alpha' M = 14{\cdot}5°$, d. h. diese Plagioklaskörner gehören in die Albit- und Oligoklasalbitreihe. Der Nephelin bildete sich oft automorph aus und erlitt eine kräftige Serizitisierung. Die reichliche Hornblende bildet nur fetzenförmige Körner; deren Eigenschaften sind: optischer Axenwinkel klein; optischer Charakter negativ; Doppelbrechung schwach; Bisektrizendispersion kräftig; Axenebene senkrecht zu (010); $c : b = 20-22°$; die Absorption $c > b > a$; der Pleochroismus:

a = bräunlichgelb,
b = dunkel bläulichgrün,
c = sehr dunkel grünlichbraun.

Die optischen Eigenschaften des sehr spärlichen Aegyrinaugit konnten wegen Mangel entsprechender Schnitte nicht näher bestimmt werden; Hauptzone negativ; die Richtung der

kräftigsten Absorption a' lebhaft grasgrün; Auslöschung sehr schief, somit Aegyrinaugit. Dieses Mineral durchwächst die Hornblende perthitartig; die durchwachsenden Teile zeigen identische Orientation. Übrige Gemengteile sind noch: reichlicher Biotit, spärlicher Cancrinit, sehr spärlicher Sodalit, verstreuter Titanit, winzige Apatitprismen, einzelne automorphe Schwefelkieskörner und bedeutendere Magneteisenkriställchen. Gesteinsstruktur: typisch hypidiomorph-körnig.

7. Nordwestlicher Abhang des *Farkas sarka* (Nr. 113).

Mittelkörniges, dunkelgraues Gestein. Die Mikroklinkörner zeigen viele Spaltrisse und unregelmäßige Konturlinien. Die Feinheit der Zwillingslamellierung der Plagioklaskörner ist sehr wechselnd, die Auslöschung undulös; Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $\gtrless \beta$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $a'M = 16°$, $15°$, $14°$, Schnitte senkrecht zu α ergaben $a'M = 16°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $a'P = 20°$, $16°$, $17°$, $16°$; somit gehört der Plagioklas in die Albitreihe.

Die in Serizitisierung sich befindenden Nephelinkörner werden stellenweise von einer dünnen Sodalithülle umgeben. Die reichlichen und teilweise prismatisch ausgebildeten Hornblendefetzen zeigen eine sehr schwache Doppelbrechung; optischer Axenwinkel sehr klein; optische Axenebene senkrecht zu (010); $b = c$; kräftige Absorption $c > b > a$; Pleochroismus:

a = hell gelblichbraun,
b = dunkel bläulichgrün, mit braunen Flecken,
c = dunkel schmutzig bräunlichgrün.

Der Kern der Hornblendefetzen wird oft braun gefärbt und zeigt beginnende Verrostung; infolge der sehr kräftigen Bisektrizendispersion wird die Auslöschung unsicher; $c : b = 25°$ im Kern und $30°$ in der Hülle; Zwillinge nach (100) sind verbreitet. Die Hornblende enthält gar oft Titaniteinschlüße. Der fetzenförmige Biotit bildet grünliche Haufen; optisch einaxig, aber in den Basisschnitten kann man stellenweise fuchsbraune Flecken erkennen, die sich optisch zweiaxig erweisen. Der Biotit wird von reichlichem Titanit und Erz begleitet.

Diese Biotithaufen stechen von der angrenzenden Gesteinsmasse gänzlich ab; sie enthalten gleichzeitig Hornblendefetzen und Zirkonkörnchen; außerdem lassen sie noch das Aggregat eines Minerals mit den folgenden Eigenschaften erkennen: Lichtbrechung sehr stark, Doppelbrechung sehr schwach oder optisch isotrop; diese Aggregate erinnern an Zirkon oder noch eher an Granat. Das begleitende Magneteisen besitzt teilweise Gitterstruktur; infolge beginnender Umwandlung wird das Mineral stellenweise fuchsrot durchscheinend. Rings um die Nephelinindividuen erkennt man spärliche Cancrinitkörner. Die größeren Apatitprismen zeigen sehr auffallend die Querabsonderung. In einer isotropen, schwach brechenden, trüben und näher nicht bestimmbaren Grundmasse fanden wir einen Aegyrinknoten, welcher die Farbe schon teilweise verloren hatte; Charakter der Hauptzone negativ; Schnitte senkrecht zu $\mathfrak{b}$ ergaben Interferenzfarben grün II-ter Ordnung; $c : \mathfrak{a} = 8—10°$; die Absorption $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$; der Pleochroismus:

$\mathfrak{a}$ = dunkel grasgrün,
$\mathfrak{b}$ = hell grasgrün,
$\mathfrak{c}$ = bräunlichgelb.

Die Struktur bildete sich teilweise hypidiomorph-körnig, teilweise panidiomorph-körnig aus.

8. *Károlyvésze*, südwestlich von ✧ 1130 (Nr. 107).

Feinkörniges, dunkelgraues Gestein. Der reichliche Mikroklinperthit wird vom xenomorphen, kleinkörnigen Plagioklas begleitet, welcher bald homogen, bald feinlamelliert ist; die Lamellen sind oft gebogen und zeigen undulöse Auslöschung; Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $< \gamma$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 9°$, Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 11°$, $13°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 19°$, $17°$; somit gehören die Plagioklase in die Albit-, bzw. Albit-oligoklas-Reihe. Der spärliche Nephelin zeigt eine weit fortgeschrittene Serizitisierung. Reichlich vorhanden ist eine Alkalihornblende, aber nur in Form fetzenförmiger Körner, die das Prisma selten erkennen lassen; optische Eigenschaften dieses Minerals sind: scheinbar optisch einaxig, Bisek-

trizendispersion sehr kräftig, optischer Charakter negativ, a liegt in der Nähe der Klinoaxe, der Pleochroismus:

a = hell, ein wenig bräunlichgelb,
b = sehr dunkelbraun,
c = dunkel bläulichgrün;

isomorphe Schichtung oft erkennbar; der innere Teil der Individuen zeigt oft eine stengelige Beschaffenheit; Auslöschungsschiefe auf der Fläche (010) zwischen 28° und 30°. Der Biotit verwächst oft mit Muskovit; Serizitschuppen durchdrängen das Gestein. Die Menge der Cancrinitkörner ist sehr untergeordnet; die reichlich vorhandenden Titanitindividuen bildeten sich oft scharf automorph aus. Erze enthält das Gestein keine, höchstens erkennt man rostgefärbte Flecken. Die Struktur erinnert infolge der großgewachsenen Mikroklinindividuen an die porphyrische, selbst die Grundmasse bildete sich panidiomorph-körnig aus. Infolge der Spärlichkeit des Nephelingehaltes stellt das Gestein einen Übergangstypus zu den Hornblende-Biotit-Alkalisyeniten dar.

III. Hornblende-Nephelinsyenit.

1. *Várpatak*-Bach; nordöstlich von ✧ 1035, unter ✧ 1151, am nördlichen Ufer hervorragende mächtige Felsen (Nr. 84).

Kleinkörniges, graues Gestein. Neben größeren, frischen Mikroklinindividuen erkennt man reichliche kleine Mikroklinleisten. Der gleichfalls leistenförmige, frische Plagioklas zeigt eine sehr wechselnd dichte Zwillingsstreifung; die bogenförmigen Lamellen desselben löschen schwach undulös aus und sind oft zerbrochen; Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam, bzw. allgemein $\alpha' <$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 12-12°$ (Albit) und 4° (Olig.-Alb.), Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 14-14°$, Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 15{\cdot}5°$, 6°, 15·5, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 17°$, somit gehört die Hauptmenge des Feldspates zum Albit und nur der untergeordnete Teil desselben zum Oligoklasalbit. Vereinzelt erscheint in Form kleiner Fetzen

eine Alkalihornblende, welche eben nur das Prisma erkennen lässt; die optischen Eigenschaften sind infolge der sehr schwachen Doppelbrechung schwer bestimmbar; Axenebene senkrecht zu (010), $b = c$; $c : b = 15°$; Axenwinkel gross; kräftiger Pleochroismus:

a = gelb,
b = bläulichbraun,
c = sehr dunkelbraun.

Der reichliche Nephelin bildete sich ziemlich automorph aus und wurde frisch erhalten, nur stellenweise bemerkt man die Serizitisierung. Untergeordnete Rolle spielen die folgenden Gemengteile: Biotitfetzen, Cancrinitkörner, scharf automorphe Titanitkristalle, Zirkonprismen, Apatitkörner und einzelne Magneteisenindividuen. Bestimmbar war noch ein kleiner Epidothaufen; als unbestimmbar erwies sich ein gelblichbraunes Mineralkorn. Infolge der Leistenform der Feldspate besitzt das Gestein eine sehr hübsche parallelstruierte (fluidalartige) hypidiomorph-körnige Struktur.

IV. Aegyrinhaltige Nephelinsyenite.

1. Nordwestlicher Abhang des *Farkas sarka*, an der Straße zur Kuppe *Piricske* (Nr. 112).

Dunkelgraues, dichteres Gestein, aus welchem größere, leistenförmige frische Mikrokline sich hervorheben; letztere sind oft Karlsbader, ja sogar auch Bavenoer Zwillinge. Die Grundmasse enthält gleichfalls reichlichen Mikroklin. Der leistenförmige oder xenomorphe Plagioklas gehört zum Albit, da die Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) 010) ergaben $\alpha' M = 14°$, bzw. $14{\cdot}5°$.

Der reichliche, frische Nephelin zeigt nur die Spuren der Serizitisierung; die größeren Individuen des vorigen Minerals lassen parallel der Hauptaxe geordnete Einschlüße von Aegyrinstäbchen erkennen. Das ganze Gestein wird von einem dichten Sodalitgewebe durchdrängt, welches besonders in denjenigen Rissen auffallend wird, die die großen Mikro-

kline durchadern. Das Gestein liefert ein musterhaftes Beispiel zur Veranschaulichung der Wirkungen der postvulkanischen Periode. Neben dem postvulkanisch gebildeten Sodalit erscheint auch der veilchenblaue Flusspat, welcher in kleiner Menge die Poren des Gesteins ausfüllt; der Cancrinit bildet nur spärliche Massen.

Es soll nebenbei bemerkt werden, daß es als eine feste Tatsache ausgesprochen werden kann, daß zur Zeit der Dislokationen kräftige postvulkanische Tätigkeit stattgefunden hat, deren Wirkungen von verschiedenem Grade gewesen sein müssten; die Rolle der verschiedenen Gase war gleichfalls wechselnd. Man kann auf Grund der verschiedenen postvulkanischen Wirkungen einzelne Umwandlungstypen aufstellen:

1. Im ersten Typus spielten die Hauptrolle solche Dämpfe, die reich an Chlor und ärmer an Fluor waren; Kohlensäure und Wasser spielten nur eine untergeordnete Rolle. Zu diesem Typus gehört das vorliegende Gestein. Postvulkanische Bildungen sind: Sodalit, Flusspat und vielleicht der Serizit.

2. Im zweiten Typus spielten die chlorhaltigen Dämpfe eine mässigere Rolle; fluorhaltige Dämpfe waren überhaupt nicht vorhanden; Kohlensäure und Wasser kamen ebenfalls nur mässig zur Wirkung. Postvulkanische Bildungen sind: Sodalit, reichlicher Cancrinit und Muskovit.

3. Im dritten Typus blieben die chlor- und fluorhältige Dämpfe vollkommen aus; Kohlensäure und Wasser spielten die Hauptrolle. Postvulkanische Bildungen sind: Cancrinit, primärer Kalkspat und Muskovit.

Selbstredend lassen sich diese Typen nicht scharf von einander trennen.

Das Gestein enthält noch reichlichen Aegyrin; derselbe bildet einerseits fetzenförmige Haufen, anderseits einzelne Körner; Absorption $a > b > c$; Pleochroismus:

a = grasgrün,
b = gelblichgrün,
c = hell bräunlichgelb;

Axenebene parallel (010); $c : a = 8 - 10°$; Doppelbrechung

$\gamma - a$ = cca. 0·035. Titanitkörner erscheinen in großer Menge und durchlöchern oft die Aegyrinindividuen. Den fetzenförmigen Biotit findet man hauptsächlich in den Aegyrinhäufen; die Farbe ist meist grünlichbraun, bzw. bräunlich mit isomorpher Schichtung. Magneteisen und Apatit sind nur spärliche Gemengteile. Die Gesteinsstruktur erinnert an die Tinguaitporphyre, nur die Grundmasse ist bedeutend grobkörniger. Mikroklin und Nephelin heben sich einsprenglingartig hervor, während die übrigen Gemengteile die Grundmasse bilden. Infolge der vielen Risse zeigt das Gestein eine Art Kataklasstruktur.

V. Sodalitsyenite und Sodalitnephelinsyenite.

1. Steinbruch im Tale des *Nagy-Kürücpatak*-Baches (Nr. 20). Mittelkörniges, helles, bzw. vom Sodalitgehalt bläulich gefärbtes Gestein. Herrschender Feldspat ist der Mikroklin, begleitet von Albit; letzterer ergab in einem Schnitte senkrecht zu γ den Auslöschungswinkel $a'P = 20°$; die Zwillingslamellen fehlen oft. Die großgewachsenen Sodalitkörner enthalten sehr viele Einschlüsse, nämlich Cancrinit, spärliche Biotitfetzen, einzelne Muskovitblätter, Schwefelkies, Magneteisen, Epidot und Mikroklin. Im letzteren kann man vereinzelte Epidotkörnchen finden. Es ist höchst auffallend, daß die fetzenförmigen Magneteisenhaufen ebenfalls Mikroklineinschlüsse enthalten. Betreffs der Gesteinsstruktur, muss darauf hingewiesen werden, dass die Grundmasse ziemlich gleichmäßig hypidiomorph-körnig ausgebildet ist; die xenomorphen Sodalitkörner, poikilitartig durchlöchert von den verschiedenen Einschlüssen, heben sich einsprenglingartig hervor. Die teilweise zerbrochene Feldspate zeigen undulöse Auslöschung mit bogenförmig gekrümmten Zwillingslamellen.

2. Zusammenfluss der Bäche *Várpatak* und *Károlypatak*, ✧ 1035; Sodalitsyenit, durchgeadert von grauen Gängen.

Grobkörniges, hellgefärbtes Gestein, infolge des Sodalitgehaltes blaugefleckt. Die grossen Mikroklinindividuen besitzen meist Tafelform; reichlich sind die Mikroklinperthite und spärlicher die Antiperthite mit trüben verwitterten Plagioklas-

schnüren. Die Plagioklasindividuen gehören zum Albit, bzw. zum Albitoligoklas, da die Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $\gtrless \beta$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $a'M = 8°$ und 11°, Schnitte parallel der Fläche (010) ergaben $a'P = 19°$.

Der spärliche, aber grobkörnige Nephelin zeigt Serizitisierung und wird mit Cancrinitadern durchwebt. Cancrinitkörner und schön rosettenförmig geordnete Muskovitblätter umkranzen die Nephelinindividuen; der Muskovit läßt einen auffallend kleinen Axenwinkel erkennen. Der Sodalit bildet einerseits große Körner, anderseits füllt derselbe besonders in der Umgebung der Nephelinindividuen zwischen den Cancrinitkörner sämtliche Lücken aus. Der fetzenförmige braune Biotit erhält stellenweise grünliche Farbe und gleichzeitig damit öffnet sich ein wenig das Axenkreuz. Schwefelkies und Magneteisen bilden nur spärliche Nebengemengteile. Das Gestein wird von feinen, opaken, rostbraunen Erzadern durchwebt. Gesteinsstruktur: hypidiomorph-grobkörnig; selbst das Gestein ist kein reiner Sodalitsyenit, da der Nephelin, wenn auch nur in kleiner Menge, doch stets vorhanden ist.

3. Nordwestlicher Abhang des *Farkas sarka*, auf dem Wege nach der Kuppe *Piricske* (Nr. 111).

Mittelkörniges, leukokrates Gestein. Neben den großen, grobperthitischen Mikroklintafeln erkennt man reichliche, kleine, xenomorphe Mikroklin- und Albitkörner. Letztere zeigen zackig-gezahnte Konturlinien und lassen sichere Kennzeichen der Faltung und des Druckes erkennen; oft greifen die Kristalle keilförmig ineinander, wobei man den Eindruck bekommt, dass der Keil von dem größeren Kristall abgebrochen war; die Auslöschung ist meist undulös, die Zwillingslamellen sind gewöhnlich sehr dicht; Periklinlamellen sind selten erkennbar. Die Albitindividuen ergaben in Schnitten senkrecht zur Kante (010) (001) $a'M = 13°$ und 14°, in Schnitten senkrecht zu a $a'M = 15{\cdot}5°$.

Die reichlicher erscheinenden Nephelinkörner erlitten ständig eine Serizitisierung bzw. Cancrinitisierung; diese Vorgänge begonnen in den Spaltrissen und in der Peripherie

der Körner. In den serizitisierten Adern kann man öfters auch größere Muskovitlamellen erkennen. Der Cancrinit umgürtelt meistens den Nephelin in Form stengelig-faseriger Kränze; die Umwandlung kann schon so weit fortgeschritten sein, daß von dem Nephelin nur Spuren erhalten blieben. Der Saum der Nepheline wird übrigens von einer schmalen Sodalithülle gebildet; außerdem durchwebt ein feines Netz sodalitischer Adern auch die cancrinitisch-serizitische Haufen; doch erscheint der Sodalit hauptsächlich an der Berührungsstelle der farblosen Gemengteile; endlich bildet derselbe noch aus großen, xenomorphen Körnern zusammengesetzte Haufen. Seltene Gemengteile sind: grünlichbraune und rostbraune Biotitfetzen und kleine Titanitkörner. Näher nicht bestimmbar waren die ziemlich großen, graulichgelben Körner mit starker Lichtbrechung und kräftigerDoppelbrechung, optisch positivem Charakter, optisch einaxig (Zirkon?) oder schwach zweiaxig (Titanit?). Überhaupt unbestimmbar erwiesen sich die Mineralkörnchen, welche die folgenden Eigenschaften erkennen ließen: Querschnitt quadratisch oder rundlich, Farbe braun, Lichtbrechung kräftig, optisch isotrop. Die Magneteisenkörner sind größtenteils in Leukoxen umgewandelt. Die Struktur ist hypidiomorph-körnig bzw. mosaikartig; selbst das Gestein kann als typischer Sodalit-Nephelinsyenit bezeichnet werden.

VI. Cancrinitsyenite.

1. *Várpatak*-Bach, von ✧ 1068 abwärts gehend ein Gang an der östlichen Seite (Nr. 2).

Verhältnismäßig dunkles, feinkörniges Gestein. Der spärliche Mikroklin mit Gitterstruktur wird von reichlichem, wasserklaren, xenomorphen, kleinkörnigen Plagioklas begleitet; letzter zeigt selten Zwillingsbildung; Lichtbrechung desselben $a' \lessgtr$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zu γ ergaben $a'P = 17°, 13°, 16°, 3°$; somit gehört derselbe hauptsächlich in die Albit-, bzw. Oligoklasalbit-Reihe und nur nebenbei zum Oligoklas. Reichlich vertreten sind die kleinen Biotit- und Hornblendefetzen; letzteres Mineral zeigt folgende Eigenschaften:

optisch negativ, Axenwinkel sehr klein, Axenebene bald senkrecht, bald parallel zu (010), somit $b = \mathfrak{b}$ oder $b = \mathfrak{c}$; Doppelbrechung sehr schwach, $\gamma - \alpha$ fast Null, die Absorption ist unabhängig von der Lage der Axenebene; der Pleochroismus:

$\mathfrak{a}$ = hell weingelb,
$\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$ = sehr dunkel bräunlichgrün,
$\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{b}$ = dunkel bläulichgrün;

$c : \mathfrak{b}$ bzw. $c : \mathfrak{a}$ = cca. 25—30°; Axendispersion kräftig. Alle diese Eigenschaften beweisen, daß die Hornblende in die Hastingsit-Barkevikit-Reihe gehört. Das Gestein wird von Titanitkörnchen siebartig durchlöchert. Kalkspat ist ein ziemlich häufiger Gemengteil; während der Epidot nur in Form einiger Körnchen vertreten wird. In dem Raume zwischen den farblosen Gemengteilen sieht man reichliche, graulichtrübe Spreusteinflecken mit feinschuppiger Struktur; unter diesen Schuppen erkennt man leicht auch Serizitschuppen. Selbst der Spreustein ist ein Umwandlungsprodukt des primären Nephelins. Überaus reichlich erscheinen die xenomorphen Cancrinitkörner; sie bilden besonders in den spreusteinhaltigen Teilen größere Haufen und ersetzen den primären Nephelin. Nebengemengteile sind die Eisenerze und der Apatit. Die Struktur des Gesteins ist panallotriomorph; selbst das Gestein kann als Hornblende-Cancrinitsyenit bezeichnet werden.

2. Oberlauf des *Békénypatak*-Baches, im großen Wasserriß nördlich von ✧ 1106.

Als Feldspat erscheint ausschließlich der Mikroklinperthit, bzw. eventuell der Mikroklinantiperthit; die Albitspindeln derselben sind sehr dicht zwillingslamelliert. Ursprünglich bildete der Nephelin wahrscheinlich große Kristalle, die sich später in eine kaolinartige schuppig-faserige Masse umwandelten; in der letzteren kann man den Cancrinit ebenfalls erkennen. Neben dem Feldspat ist der Cancrinit der herrschende Gemengteil; derselbe bildet kleinere und größere Körner. In der Zusammensetzung der kaolinartigen Masse spielt der Serizit eine gleichfalls wichtige Rolle. Biotit erscheint nur spärlich, aber in großen Blättern; Titanit und Apatit

sind nur sehr untergeordnete Gemengteile. In der Nachbarschaft der Magneteisenkörner findet man häufiger den Kalkspat; das Magneteisen kann mit Schwefelkies verwachsen sein. Die Struktur ist granitisch hypidiomorph-körnig; das Gestein erlitt aber eine kräftige Umwandlung. Betrachtet man den Cancrinit als einen sekundär gebildeten Gemengteil, dann muß das Gestein als biotithaltiger Alkalisyenit bezeichnet werden.

3. *Károlyvésze,* südwestlich von ✧ 1130 (Nr. 16).

Kleinkörniges, dunkelgraues Gestein. Der Feldspat ist teilweise frischer Mikroklin, teilweise wasserklarer Albit; letzterer ergab: Lichtbrechung $\alpha' \leqq$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 10-10°$, $11-11°$, Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 14-13°$, $14°$, $12°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 14°$.

Der spärliche Nephelin ist größtenteils serizitisiert; der reichliche Cancrinit füllt hauptsächlich die Lücken aus. Die Hornblende spielt eine sehr wichtige Rolle in der Zusammensetzung des Gesteins; die xenomorphen bzw. fetzenförmigen Individuen lassen den prismatischen Habitus ziemlich gut erkennen; Axenebene senkrecht zu (010); optischer Axenwinkel $< 20°$; Bisektrizendispersion sehr kräftig; optischer Karakter negativ; starke Absorption $c > b > a$; Pleochroismus:

a = hellgelb,
b = dunkel bläulichgrün, stellenweise mit isomorphen bräunlichen Flecken,
c = dunkel bräunlichgrün;

$c : b = 19-21°$. Die Hornblende enthält einschlußartig Erze und Epidotkörner; letzteres Mineral kann man auch sonst im Gestein beobachten und da das Gestein vollkommen frisch erhalten wurde, muß der Epidot als primär gebildet betrachtet werden. Der spärliche Biotit verwächst gewöhnlich mit der Hornblende. Titanit erscheint reichlich. Das Gestein ist ein wenig schieferig gestaltet; die Struktur erinnert an die Pflasterstruktur; die Körner sind gleichmäßig mittelgroß. Am meisten zutreffend kann das Gestein als Hornblende-Cancrinitsyenit bezeichnet werden.

4. Nordöstlicher Abhang des *Fehérpatak sarka*, ✧ 1394 (Nr. 54).

Mittelkörniges, hellgefärbtes Gestein mit dunklen Biotitknoten. Die großen Mikroklinperthite sind tafelig nach (010); die Albitspindeln ergaben: Lichtbrechung $\alpha' \leqq$ Balsam $\leqq \gamma'$, in Schnitten parallel zu (010) ist $\alpha' P = 6°$ (Mikroklin) und $\alpha' P = 20°$ (Albit); Karlsbader Zwillinge sind häufig, Manebacher Zwillinge selten. Die großen Mikroklinperthittafeln werden von kleinen, xenomorphen Mikroklinkörnchen und spärlichen, wasserhellen Albitindividuen begleitet; letztere ergaben: Lichtbrechung $\beta' <$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 13 \cdot 5 - 13 \cdot 5°$ (α tritt sehr schief aus), Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 17 - 20°$.

Die reichlichen, xenomorphen Cancrinitkörner bilden mosaikartige Haufen. Die großen Tafeln des seltenen Biotitglimmers zeigen wechselnden Pleochroismus:

a = strohgelb,
b = c = dunkelbraun, bzw. schmutzig grünlichbraun;

der grünlich gefärbte Biotit bildet auch kleinschuppige Haufen; dieselben lassen resorptionsähnliche Erscheinungen erkennen. Übrige Gemengteile sind noch: spärliches Magneteisen, Schwefelkies und Titanit. Das Gestein wurde mit sehr kleinen Körnchen pigmentiert und mit rostfarbigen Adern durchwebt. Im hypidiomorph-körnigen Gestein bilden die größeren Cancrinitindividuen, bzw. die Albithaufen mosaikartige Bildungen; sonst ist der Gesteinskarakter miarolitisch. Das Gestein kann als typischer Cancrinitsyenit bezeichnet werden.

5. Oberlauf des *Várpatak*-Baches, bei dem Zusammenfluß der beiden Arme (Nr. 93).

Grobkörniges, leukokrates Gestein mit einigen großen Biotitknoten. Die großtafeligen Mikroklinperthite, bzw. Antiperthite wurden sehr frisch erhalten; sie bilden oft Karlsbader, seltener Bavenoer Zwillinge. Die spärlichen Albitindividuen sind xenomorph, bzw. leistenförmig; Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 20°$; Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $\gtrless \gamma'$; neben der Albitlamellierung erkennt man selten auch die Periklinzwillings-

bildung. Größere abgerundete Nephelinkörner wurden mit Cancrinit adern durchwebt; sonst füllt der reichliche, primär bildete Cancrinit sämtliche Gesteinslücken aus; das Mineral wird von spärlichem Sodalit begleitet. Der bräunliche Biotit bildet einzelne Blätter oder fetzenförmige Haufen; das Mineral enthält zahlreiche Einschlüsse, die von pleochroistischen Höfen umgeben sind. Titanit ist ein häufiger accessorischer Gemengteil. Das Erz gehört zum titanreichen Magneteisen, welches meistens eine skelettförmige Ausbildung zeigt; seltener werden die Titanitkörner vom Magneteisen kelyphitartig umgürtelt. Den Apatit findet man hauptsächlich in den dunklen Gemengteilen. Das Gestein zeigt eine zierliche grobkörnige, bzw. pegmatitische Struktur; die Feldspate bildeten sich ziemlich automorph aus; die miarolitischen Hohlräume wurden mit Cancrinit ausgefüllt; deswegen wird das Gestein als nephelinhaltiger Cancrinitsyenit bezeichnet.

VII. Umptekite.

1. *Károlypatak*-Bach, südwestlich von ✧ 1130 in der Talmündung (Nr. 45).

Schieferig gestaltetes, kleinkörniges Gestein von dunkelgrauer Farbe. Der spärliche Mikroklin wurde vollkommen frisch erhalten und zeigt keine perthitische Verwachsungen. Der Plagioklas wird durch Albit und Oligoklasalbit vertreten; die reichlichen Körner derselben sind klein, wasserhell und vollständig xenomorph; Lichtbrechung $\alpha' \leqq$ Balsam $\leqq \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 12-12°$ (α tritt schief aus) und 9—9°, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 12°$, Schnitte parallel zu (010) ergaben $\alpha' P = 15°$ (γ tritt schief aus).

In großer Menge erscheint die Alkalihornblende, deren fetzenförmige Prismen nur selten die Formen $\{010\}$ und $\{110\}$ erkennen lassen; Bisektrizendispersion kräftig; Axenebene parallel (010); $c : c = 30-32°$; die Absorption $\mathfrak{b} > \mathfrak{c} > \mathfrak{a}$; der Pleochroismus:

$\mathfrak{a}$ = hellgeblich, mit grüner Nuance,
$\mathfrak{b}$ = sehr dunkel bräunlichgrün,
$\mathfrak{c}$ = dunkelgrün;

Axenwinkel sehr klein; optischer Karakter negativ; Kern der Kristalle öfters ein wenig bräunlich gefärbt und vom faserigen Gefüge. Nephelin ist im Gestein überhaupt nicht erkennbar. Das Gestein wird von einem dichten serizitischcancrinitischen Gewebe durchadert. Sämtliche Lücken zwischen den Feldspaten wurden mit Cancrinit ausgefüllt; es ist möglich, daß dieser Gemengteil aus dem ursprünglichen Nephelin entstanden war, da aber vom letzteren Mineral nichts mehr vorhanden ist, muß das Gestein den Alkalisyeniten zugerechnet werden. Die stengeligen Individuen der Cancrinithaufen zeigen innerhalb eines gewissen Gebietes gleiche optische Orientierung. Der häufige xenomorphe Biotit verwächst verschiedenerweise mit der Hornblende. Übrigens erscheint dieser Glimmer in zwei Varietäten, deren eine grünlichbraune, die andere rein grüne Farbe zeigt; die beiden Varietäten gehen isomorph ineinander über. Der grünlichbraune Biotit besitzt einen optischen Axenwinkel von mindestens 10—15°; Pleochroismus desselben:

a = sehr hell strohgelb,
b = grün,
c = bräunlichgrün.

Die grüne Varietät hat einen Axenwinkel von fast 0° und den Pleochroismus b = c = grün.

Es ist eine auffallende Erscheinung, dass am Saume der Biotite, d. h. dort, wo sie sich mit den Nachbargemengteilen berühren und auch in den Spaltrissen dieses Minerals, reichliche, kleine, opake oder rötlichbraun durchscheinende Erzkörnchen sich angesiedelt hatten. Ez ist wahrscheinlich, daß diese Erzanhäufung in der postvulkanischen Periode stattfand; für diese Annahme spricht die Frische der Glimmerblätter. Die Hornblende zeigt keine Erzbildung; die Individuen lassen keine Spur der Umwandlung erkennen. Die Frische der farbigen Gemengteile beweist, dass die Cancrinit- und Serizitbildung keine gewöhnliche Verwitterungserscheinungen, sondern Umwandlungsvorgänge darstellen, bei denen die verschiedenen Agentien tätig waren. Das Urmineral dieser beiden Gemengteile kann der Nephelin gewesen sein. Der ziemlich reichliche Titanit

bildet einerseits Einschlüsse in den farbigen Gemengteilen, und zwar besonders in der Hornblende, anderseits findet man denselben überall im Gestein gleichmäßig verstreut. Zwischen den farbigen Gemengteilen sieht man vereinzelte Pistazithaufen. Apatitkörner erreichen ziemliche Dimensionen. Die Struktur ist ein wenig schieferig, sonst aber richtungslos körnig, bzw. neigt in die panidiomorph-körnige.

2. Tal des *Csanód*-Baches, östlich von ✧ 990 (Nr. 76).

Grobkörniges, leukokrates, rötlich gefärbtes Gestein; aus der Gesteinsmasse heben sich dunkle Biotit- und Hornblendehaufen hervor. Die großen und frischen Mikrokline sind meistens Perthite, bzw. Antiperthite, deren Albitspindeln in Schnitten senkrecht zu γ ergaben $a'P = 17°$. Die reichlichen kleinen Albitkörner sind wasserklar frisch; die schmalen Zwillingslamellen wurden oft in flachen Bogen gekrümmt und zeigen dabei undulöse Auslöschung; selten erkennt man die Periklinzwillingsverwachsung; Lichtbrechung $a' <$ Balsam $= \beta$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $a'M = 12{\cdot}5-12{\cdot}5°$ und 14°, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $a'P = 18{\cdot}5°$ und 19°.

Der spärliche und xenomorph ausgebildete Nephelin wurde weitgehend serizitisiert und cancrinitisiert. Die Hornblende zeigt teilweise eine Zerfaserung; Axenebene senkrecht zu (010); $b = c$; Bisektrizendispersion kräftig; optischer Karakter negativ; $c : b = 10°$; Absorption $c > b > a$, Pleochroismus:

a = bräunlichgelb,
b = dunkel bläulichgrün
c = dunkel bräunlichgrün,

Die Hornblende enthält oft zahllose, parallel der Längsrichtung geordnete stäbchenförmige Einschlüsse, die eine kräftige Lichtbrechung und ebenfalls kräftige Doppelbrechung zeigen. Diese Einschlüsse sind höchstwahrscheinlich stäbchenförmige Titanite. Nebenbei kann die Hornblende alle übrigen Gemengteile als Einschlüsse enthalten. Die Hornblendeindividuen sind öfters mit Biotit durchwachsen; im letzteren kann man pleochroistische Höfe erkennen. In den serizitischen Haufen findet

man einzelne größere Muskovitlamellen. Scharf automorph ausgebildet sind die kleinen Zirkon kristalle. Titanitkörner durchwachsen das frische Magneteisen oder die Kristalle des letzteren sind wahrhaftig siebartig durchlöchert. Spärlicher Sodalit und Kalkspat füllen sämtliche Lücken des Gesteins aus. Apatit ist ein häufiger Nebengemengteil. Gesteinsstruktur: hypidiomorphkörnig.

3. *Várpatak*-Bach, cca. 800 m nördlich von ✧ 1009, graue schiefrige Gänge im leukokraten Syenit (Nr. 95).

Dunkelgraues Gestein mit gneißartigem Habitus. Die kleinen Mikroklinindividuen sind selten Perthite. Der reichliche Plagioklas zeigt meistens dichte Zwillingslamellierung; die Lamellen wurden öfters flach gebogen und löschen undulierend aus; Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 10°$ im Kern und 15° in der Hülle, Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 11°$ im Kern und 14° in der Hülle, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 16{\cdot}5°$, 19°, 16°, 13°, 15·5°, Schnitte senkrecht zu a ergaben $\alpha' M = 9°$ und 8°; somit gehört der Plagioklas in die Albit-, bzw. Oligoklasalbit-Reihe.

Die herrschende Hornblende erscheint in kleinen Fetzen; Axenebene parallel (010); optischer Karakter negativ; $c : c = 26°$; Bisektrizendispersion kräftig; optisch fast einaxig; Absorption kräftig $b > c > a$; Pleochroismus:

a = gelblichgrün,
b = dunkel bräunlichgrün,
c = dunkel bläulichgrün.

Grüner, fetzenförmiger Biotit erscheint nur in kleiner Menge; Titanit ist reichlich und gleichmäßig überall im Gestein verstreut; in der Nachbarschaft der farbigen Gemengteile findet man den spärlichen Epidot, die Erze und den Apatit. Serizitische und muskovitische Adern durchweben reichlich das schiefrige Gestein, welches sonst panidiomorph-körnige Struktur besitzt und als gangförmig auftretender Umptekit bezeichnet werden kann.

4. *Várpatak*-Bach, 200 m abwärts von der Mündung des

Baches *Beret útja patak;* leukokrate Gänge im glimmerreichen Syenit (Nr. 104).

Mittelkörniges Gestein von dunklerer Farbe. Neben einzelnen größeren Mikroklinperthit-Individuen findet man reichliche, kleine, xenomorphe Mikroklinkörner. Der sehr feinkörnige Oligoklasalbit zeigt eine wechselnd dichte Zwillingslamellierung mit schwach zonarem Bau und undulöser Auslöschung; Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $\gtrless \gamma$, Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 6°$, $12°$, Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 9°$, Schnitte senkrecht zu γ ergab $\alpha' P = 14°$ und $15{\cdot}5°$.

Die Hauptmasse des Gesteins besteht aus kleineren und größeren Hornblendefetzen, welche mit Titanitkörnern bestreut sind. Der Kern der Hornblendeindividuen besitzt eine stengelig-faserige Struktur; in der Prismenzone sind die Formen $\{110\}$ und $\{010\}$ selten erkennbar; Doppelbrechung schwach; Axenebene senkrecht zu (010); $b = c$; optischer Karakter negativ; Axenwinkel klein; $c : b =$ cca. $30°$; Bisektrizendispersion sehr kräftig; Absorption $c > b > a$; Pleochroismus kräftig:

$a =$ hell bräunlichgelb,
$b =$ dunkel bläulichgrün,
$c =$ sehr dunkel bräunlichgrün.

Titanit findet sich reichlich im Gestein verstreut; in seiner Begleitung trifft man stellenweise Häufchen, die aus stark lichtbrechenden isotropen, hellbräunlichen, xenomorphen Körnchen bestehen. Diese Häufchen umkränzen meistens die Hornblendeindividuen und enthalten gleichzeitig einzelne Aegyrinaugitfetzen; das isotrope Mineral gehört höchstwahrscheinlich zum titanreichen Granat. Die Lücken zwischen den Gemengteilen wurden mit Serizit und Cancrinit ausgefüllt; Nephelin ist überhaupt nicht mehr erkennbar. Apatit zeigt sich nur spärlich; das Magneteisen bildet xenomorphe Körner, während der Swefelkies in größeren, automorphen und teilweise verrosteten Individuen erscheint. Zwischen den Hornblendefetzen findet man sehr vereinzelt winzige Epidotkörnchen. Das ganze Gestein wird von einem Netze feinster Rissen durchwebt, die

mit einem schwach doppelbrechenden und schwach lichtbrechenden Mineral (Cancrinit?) ausgefüllt sind. Die Gesteinsstruktur zeigt sich teilweise hypidiomorph-körnig, teilweise panidiomorph-körnig; somit stellt das Gestein bezüglich der Struktur einen Übergangstypus dar.

VIII. Pulaskitartige, biotithaltige Alkalisyenite.

1. Tal des *Várpatak*-Baches, grauliche Gänge im rötlichen Syenit (Nr. 55).

Im Durchschnitt mittelkörniges, rötlichgraues Gestein. Der reichliche Mikroklin bildet kleinere oder größere, xenomorphe, perthitische Individuen; in großer Menge erscheinen die frischen Plagioklaskörner mit gebogenen und undulös auslöschenden Zwillingslamellen, die oft zerbrochen wurden; Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $\lessgtr \beta$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 13°$, $14°$, $10°$, Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 15°$ und $11°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 20°$; somit gehören diese Plagioklase teilweise zum reinen Albit, teilweise zum Oligoklasalbit. Die spärlichen, lappenförmigen Biotitblätter zeigen sich meistens optisch einaxig, stellenweise wird aber der Axenwinkel ziemlich bedeutend; die verrosteten Erzkörnchen füllen einerseits die Risse aus, anderseits ordnen sie sich am Saume der Blätter. Schuppig-stengelig-faserig gestaltete und eisblumenförmige Serizithaufen durchweben reichlich das Gestein; die Risse der sonst frischen Feldspate wurden gleichfalls mit Serizit ausgefüllt. Die Zahl der Titanitkörner ist klein, während das titanithaltige Magneteisen im Gestein reichlich verstreut vorhanden ist; letzteres Mineral zeigt oft Leukoxenbildung oder Rostung. In einem Falle fanden wir eine zierliche Titanitpseudomorphose nach Magneteisen. Apatitkörner sind sehr spärlich. Die Struktur stellt einen Übergangstypus dar; dieselbe ist weder hypidiomorph-körnig, weder panidiomorph-körnig; im Schliffe sieht man deutlich, daß die Korngröße wechselt; Spuren der Kataklase sind oft erkennbar. Das Gestein kann als Biotitalkalisyenit, bzw. als Biotitpulaskit bezeichnet werden.

2. Tal des *Várpatak*-Baches, nördlich von ✧ 1035 (Nr. 79).

Hellrötliches, leukokrates Gestein mit dunklen Hornblende-Biotit-Knoten. Die größeren, xenomorphen Mikrokline bildeten sich fast immer perthitisch aus; die Plagioklasspindeln derselben bestehen aus Albit, da Schnitte senkrecht zu γ ergaben $a'P = 19°$. Sonst besitzt der Kalifeldspat oft orthoklastischen Habitus. Die reichlichen, kleinen Plagioklaskörner gehören zum Albit bzw. zum Oligoklasalbit, da Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $a'M = 7{\cdot}5°$ und 14°, Schnitte senkrecht zu a ergaben $a'M = 8°$.

Die größeren und dicht zwillingslamellierten Plagioklase zeigen stellenweise eine stärkere Trübung und besitzen Oligoklas charakter, während die kleineren Körner wasserklar sind. Die Hornblende bildet große, xenomorphe Individuen, wird von Biotit durchwachsen und enthält ausserdem Titanit-einschlüsse. Optische Eigenschaften der Hornblende: Axenebene senkrecht zu (010), $b = c$, Axenwinkel klein; negative Doppelbrechung schwach; Axendispersion kräftig $\upsilon > \rho$; Bisektrizendispersion gleichfalls kräftig; Absorption $c > b > a$; Pleochroismus stark:

a = bräunlichgelb,
b = dunkel bläulichgrün,
c = dunkel bräunlichgrün.

Die spärlichen grünlichbraunen Biotitlappen enthalten Apatiteinschlüsse. Der Raum zwischen den farblosen Gemengteilen wird größtenteils mit schuppig-trübem Serizit ausgefüllt; stellenweise erreichen diese Schuppen den Dimensionen größerer Muskovitblätter. Zwischen die Hornblendeindividuen eingeklemmt findet man einige Epidotkörnchen. Der Titanit bildet einerseits kleine, xenomorphe Körner, anderseits größere, automorphe Kristalle. Apatitprismen erkennt man öfters, während die Erze, nämlich Magneteisen und Schwefelkies, und der automorphe Zirkon nur sehr spärlich vertreten sind. Die Struktur ist hypidiomorph-grobkörnig; selbst das Gestein wird am zweckmäßigsten als biotit- und hornblendehaltiger Alkalisyenit bezeichnet.

3. Tal des *Várpatak*-Baches, ✧ 1035, ein wenig nördlich von der Kontaktzone (Nr. 80).

Gröber körniges, leukokrates Gestein mit schönen Biotithaufen. Die größeren Mikrokline bildeten sich perthitisch aus. Der reichliche, xenomorphe Plagioklas zeigt gewöhnlich dichte Zwillingslamellierung und dabei undulöse Auslöschung; Lichtbrechung $\alpha' \lessgtr$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 12-12°$, $8-8°$, $8-8°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 15°$, $17°$.

Die Hauptmenge des Plagioklases gehört somit zum Oligoklasalbit; Albit und saurer Oligoklasalbit sind schon seltenere Feldspate. Der grünlichbraune Biotit bildet größere fetzenförmige Knoten, in denen die kleinen Titanitkörnchen oft perlenschnurartig geordnet sind; außerdem enthält das Gestein noch ziemlich reichlich größere automorphe Titanitkristalle. Die schuppig-rosettenförmigen Serizitmassen wurden besonders zwischen den leukokraten Gemengteilen angehäuft; sie werden oft von Kalkspatkörnchen begleitet. Das Magneteisen erscheint selten automorph; meist bildet dasselbe resorbierte durchlöcherte Körner, welche eingewachsene Apatitprismen enthalten. Nur vereinzelt findet man Schwefelkiesindividuen, die teilweise schon verrostet sind. Das Gestein wird von einem Netzwerke feiner Rissen durchwebt, welche mit serizitisch-epidotischen Massen ausgefüllt sind; einzelne verstreute Epidotkörner sind auch sonst im Gestein zu finden. Die Struktur ist typisch hypidiomorph-körnig.

4. Tal des *Várpatak*-Baches, roter Syenit in der Nachbarschaft der Kontaktzone bei ✧ 1035 (Nr. 88).

Hell fleischrotes, mittelkörniges Gestein mit spärlichen Biotitknoten. Der gänzlich xenomorphe, reichliche Mikroklin zeigt Gitterstruktur und ist meistens mit Albit grobperthitisch verwachsen; spärlicher findet man Antiperthite. Die Zwillingslamellen des ebenfalls xenomorphen Plagioklases werden oft äußerst dünn oder sie fehlen überhaupt gänzlich; die Auslöschung zeigt sich undulös; Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $\alpha' M = 3°$, Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 5-7°$, $10°$, Schnitte

senkrecht zu γ ergaben $a'P = 10°$, $15·5°$; somit gehören die Plagioklase zum Albit, bzw. zum sauren Oligoklas. Äußerst kleine, farblose Glimmerplättchen durchweben die Plagioklasindividuen. Die fetzenförmigen Biotithaufen zeigen schon Verwitterungserscheinungen; die Spaltflächen wurden mit Rost besetzt; das letztere Material durchdringt sämtliche Spalten des Gesteins und sickert auch zwischen die farblosen Gemengteile hinein. Rings um die Zirkoneinschlüsse zeigen sich in den Biotitlamellen schöne pleochroistische Höfe; opake Erzeinschlüße sind gleichfalls verbreitet. Sämtliche farblose Gemengteile wurden meist mit kleinen rostbraunen Körnchen pigmentiert und dadurch erhält das Gestein die fleischrote Farbe. Die Struktur ist teilweise hypidiomorph-körnig, teilweise panidiomorph-körnig; die Gemengteile greifen lappenförmig ineinander.

5. *Várbükk*, roter Syenit am Abhang östlich von ✧ 1297 (Nr. 98).

Feinkörniges, hell fleischrötlich gefärbtes Gestein. Neben reichlichem, kleinkörnig-xenomorphen, perthitischen Mikroklin sieht man ähnlich gestaltete Plagioklas-körner mit feinen Zwillingslamellen. Letzterer Gemengteil gehört hauptsächlich in die Albit-, bzw. in die Oligoklasalbit-Reihe; reine Oligoklase finden sich nur untergeordnet, da die Lichtbrechung $a' <$ Balsam $\gtreqless \gamma'$ und Schnitte senkrecht zur Kante (001) (010) ergaben $a'M = 12°$, $14°$, $11°$, Schnitte senkrecht zu a ergaben $a'M = 8°$, $1·5°$.

Stellenweise zeigt sich der Feldspat in Form äußerst winziger Körner, die durch die Zermalmung größerer Individuen entstanden sind. Infolge der Serizitisierung erlitten die Plagioklase eine Trübung; lamellen- und rosettenförmige Muskovithaufen sind überhaupt ziemlich verbreitet. Die zerquetschten und zermalmten Teilchen wurden mit Erzpigment, Leukoxen und grünem Chlorit überzogen; diese Verwitterungsprodukte entstanden aus dem fetzenförmigen, grünlichbraunen Biotit. Eisenrost durchtränkt das Gesteinsgewebe. Zirkonkriställchen findet man nur sehr spärlich. Die optischen Eigenschaften eines größeren, xenomorphen Kornes erinnern an den Orthit: Farbe dunkelbraun, Axenwinkel sehr klein, Doppelbrechung schwach, Absorp-

tion $c > a$. Die Gesteinsstruktur ist hypidiomorph-körnig; selbst das Gestein kann kurz als Alkalisyenit bezeichnet werden.

6. *Károlyvésze*, südwestlich von ✧ 1130 (Nr. 108).

Sehr hellgefärbtes, fast weißes Gestein mit einzelnen dunklen Biotitknoten. Die reichlichen, xenomorphen Mikroklinperthite erwecken den Eindruck, daß der Saum der Körner abgerieben wurde; stellenweise erkennt man die Wirkung der Pressung. Die großen, xenomorphen Plagioklaskörner sind oft gepreßt und zerbrochen; infolgedessen zeigen dieselben undulöse Auslöschung; optischer Charakter positiv; Lichtbrechung $\alpha <$ Balsam $= \beta$ und Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 7°$, Schnitte senkrecht zu γ ergaben $\alpha' P = 13°$ und $18°$; somit gehören die Plagioklase in die Oligoklasalbit-, bzw. Albitreihe; die eventuell vorhandenen Zwillingslamellen sind gebogen. Die größeren Feldspate werden mit einem Kranze äußerst kleiner Mikroklin- und Albitkörner umgeben; die letzteren sind gänzlich xenomorph und haben die Erscheinungsweise eines kataklastischen Mörtels. Das mikroskopische Bild bietet den Eindruck, dass die großen Feldspate teilweise zermalmt wurden und aus den zermalmten Teilen entstanden die oben erwähnten Mozaikkränze. Die kleinen Körner ergaben: Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 12°$.

Der Feldspat zeigt eine kräftige Serizitisierung; der Muskovit bildet schuppige und rosettenförmige Haufen. Die spärlichen, bräunlichgrünen Biotitfetzen sind auf die kataklastischen Teile beschränkt; die Schuppen sind stark verbogen und werden von Muskovit, Epidot, Titanit und Erzen begleitet; die größeren Titanitindividuen sind von einem Erzkranz umgeben. Die kleineren Magneteisenkörner zeigen teilweise automorphe Ausbildung; zwar befinden sie sich überall im Gestein verstreut, doch erscheinen dieselben in größerer Menge nur in der Begleitung der farbigen Gemengteile. Randliche Umwandlung des Magneteisens ist ziemlich verbreitet (Leukoxen oder Epidot?). Der Apatit bildet größere, xenomorphe Körner. Epidot erscheint stellenweise einschlußförmig in den Feldspaten und wird von verrostenden Erzen umsäumt; sonst kann man diesen Gemengteil besonders in der Begleitung des Biotit-

glimmers überall im Gestein treffen. Das Gestein zeigt eine typische kataklastische Mörtelstruktur und dabei einen aplitisch leukokraten Charakter; dasselbe kann kurz als Alkalisyenit bezeichnet werden.

7. Unterer Steinbruch im Tale des *Nagy-Kürücpatak*-Baches, östlicher Abhang (Nr. 116).

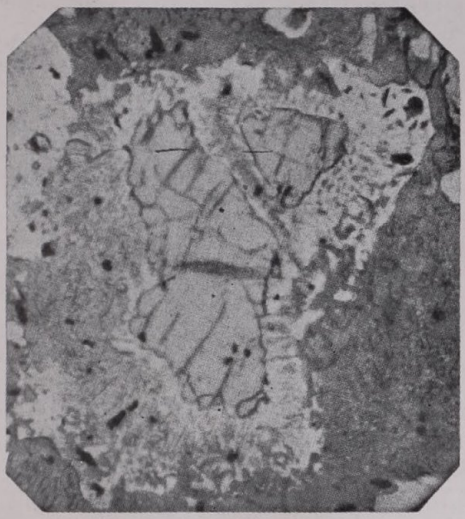
Mittelkörniges, dunkles Gestein. Der gänzlich xenomorphe Mikroklin bildet perthitische, bzw. antiperthitische Verwachsungen; die Mikroklinindividuen wurden kräftig zermalmt; die Lamellen der Albitspindeln zeigen undulöse Auslöschung. Die gleichfalls xenomorphen Albitkörner haben spitzige und bogenförmige Konturlinien; sie wurden kräftig gepresst, zerbrochen und zermalmt; die Zwillingslamellierung derselben erinnert an den Ruinenmarmor und lässt mikroskopische Verwerfungen und Flexuren erkennen; die einzelnen Lamellen sind flach oder wellenförmig gebogen und zeigen stark undulöse Auslöschung. Periklinzwillinge sind selten erkennbar; Lichtbrechung $\alpha' <$ Balsam $< \gamma'$ und Schnitte senkrecht zu α ergaben $\alpha' M = 15 \cdot 5°$ und 14°.

Die größeren, braunen Biotitlamellen finden sich spärlich; sie wurden kräftig geknetet und zerrissen; an den Stellen der kräftigsten Zermalmung bildet der Biotit ausgezogene und ausgewalzte reihenförmig geordnete Teilchen und Netzwerke. Ebendaselbst erscheinen die Serizitschuppen, die spärlichen, xenomorphen Kalkspatkörner und das Sodalit-Cancrinitmosaik. Sonst wird das Gestein von zahlreichen Rissen durchquert, die hauptsächlich mit Biotit, Kalkspat und einer cancrinitähnlichen Masse ausgefüllt sind. Zirkonkörnchen findet man nur sehr vereinzelt. Der Biotit wird von zahlreichen, xenomorphen Magneteisenkörnchen begleitet. Das Gestein zeigt eine typische Mörtelstruktur. Unter sämtlichen hier beschriebenen Gesteinen beweist das vorliegende am augenscheinlichsten die dynamischen Wirkungen, welche im Syenitstock von Ditró stattgefunden hatten. Selbst das Gestein kann als biotithaltiger Alkalisyenit bezeichnet werden.

*

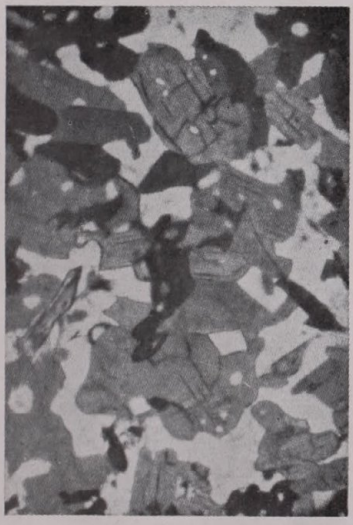
Auf Grund unserer bisherigen Untersuchungen scheint eine Tatsache bewiesen zu sein; das ist die dynamische Umwandlung des Syenitstockes während der pneumatolytischen Periode. Da ausser den erwähnten Rissen, welche mit einer feinen aus Sodalit, Cancrinit und Muskovit bestehenden Masse ausgefüllt wurden, keine Spuren einer neueren Kataklase erkennbar sind, so wird die Annahme sehr wahrscheinlich, daß das Gestein auch keinen neueren dynamischen Wirkungen ausgesetzt wurde. Aus dieser Annahme folgt wieder das Resultat, dass in den eingehend besprochenen Erscheinungen die Merkmale einer verhältnismäßig jungen Faltungsperiode zu suchen sind. Dadurch aber wird es unwahrscheinlcih, dass die Zeit der Intrusion schon vor dem Mezozoikum zu suchen wäre. Wir glauben, daß unsere spätere Untersuchungen diese Annahme noch weiter bestätigen oder sogar eine nähere stratigraphische Bestimmung ermöglichen werden.

M. T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

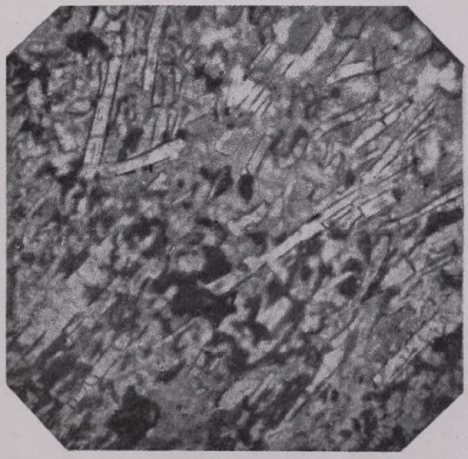


1.

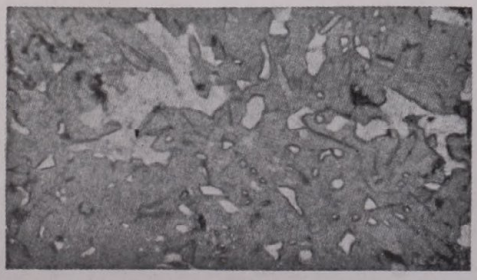
2.



3.



4.



5.

M.T. AKADÉMIA
KÖNYV-
TÁRA